Master Parisien de Recherche en Informatique

Modèles des langages de programmation

Travaux Dirigés n°1

Paul-André Melliès

<mellies@pps.jussieu.fr>

Dans les trois exercices qui suivent, nous reprenons la notion d'adjonction introduite en cours, et nous y exerçons. En particulier, nous étudions comment déduire les morphismes d'évaluation

$$A \times (A \Rightarrow B) \quad \longrightarrow \quad B$$

et de co-évaluation

$$B \quad \longrightarrow \quad A \Rightarrow (A \times B)$$

comme unité et counité de l'adjonction

$$A \times - \quad \dashv \quad A \Rightarrow -$$

des catégories cartésiennes closes (Exercice 1) avant de généraliser la construction à toute adjonction (Exercice 2). Enfin, nous reprenons un exercice traité en cours, portant sur l'adjonction entre la catégorie des ensembles et la catégorie des monoïdes (Exercice 3).

Exercice 1:

Soit $\underline{\text{Ens}}$ la catégorie des ensembles et fonctions. Pour tout triplet A, B, C d'ensembles, on définit une bijection

$$\varphi_{A,B,C} \quad : \quad \underline{\text{Ens}}(A \times B, C) \quad \longrightarrow \quad \underline{\text{Ens}}(B, A \Rightarrow C) \qquad (1)$$

qui à toute fonction binaire

$$f \quad : \quad (a, b) \quad \mapsto \quad f(a, b)$$

associe la fonction “d’ordre supérieure”

$$b \quad \mapsto \quad f_b$$

qui à tout élement $b \in B$ associe la fonction f_b définie par

$$f_b \quad : \quad a \quad \mapsto \quad f(a,b).$$

On appelle cette opération la curryfication (du nom de Haskell Brooks Curry, logicien).

Question 1. Montrez que

$$B \quad \mapsto \quad A \times B \tag{2}$$

et

$$B \quad \mapsto \quad A \Rightarrow B \tag{3}$$

définissent deux foncteurs de la catégorie <u>Ens</u> dans elle-même.

Question 2. Expliquez ce que signifie que φ est naturelle en A et C... et démontrez le.

Question 3. Construisez à partir de la bijection (1) les deux morphismes suivants:

- l’évaluation:
$$A \times (A \Rightarrow B) \quad \longrightarrow \quad B$$
- la co-évaluation:
$$B \quad \longrightarrow \quad A \Rightarrow (A \times B)$$

Exercice 2:

On généralise la situation de l’exercice précédent. Soient deux catégories $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, et deux foncteurs:

$$L \quad : \quad \mathbb{A} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{B}$$

et

$$R \quad : \quad \mathbb{B} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{A}.$$

On dit que le foncteur L est adjoint à gauche du foncteur R lorsqu'il existe une famille de bijections

$$\varphi_{A,B} \quad : \quad \mathbb{A}(A, R(B)) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{B}(L(A), B) \tag{4}$$

indicée par un objet A de la catégorie $\mathbb{A}$ et un object B de la catégorie $\mathbb{B}$, vérifiant certaines conditions de naturalité.

Question 1. Exprimez les conditions de naturalité.

Question 2. Montrer que le foncteur (2) est adjoint à gauche du foncteur (3), cela pour tout ensemble A.

Question 3. Montrer que lorsqu'un foncteur L est adjoint à gauche à un foncteur R, il existe, pour tout objet A de la catégorie $\mathbb{A}$ et tout objet B de la catégorie $\mathbb{B}$:

$$A \quad \longrightarrow \quad RL(A)$$
$$B \quad \longrightarrow \quad LR(B)$$

Comparez avec les morphismes d'évaluation et de coévaluation construits dans le premier exercice.
Question 4 (optionnel). Montrer que $L \circ R$ définit une monade sur la catégorie $\mathbb{A}$; et symétriquement, que $R \circ L$ définit une comonade sur la catégorie $\mathbb{B}$. (on trouvera les définitions de monade et comonade dans le cours).

Exercice 3:

Soit $\underline{\text{Mon}}$ la catégorie dont les objets sont les monoides, dont les morphismes sont les homomorphismes de monoide. Montrez que l'opération qui consiste à associer à un monoide M l'ensemble $U(M)$ sous-jacent définit un foncteur

$$U \quad : \quad \underline{\text{Mon}} \quad \longrightarrow \quad \underline{\text{Ens}}.$$

Montrer que ce foncteur a pour adjoint à gauche le foncteur

$$T \quad : \quad \underline{\text{Ens}} \quad \longrightarrow \quad \underline{\text{Mon}}$$

qui à tout ensemble X associe son monoide libre $T(X) = X^*$.