Master Parisien de Recherche en Informatique

Modèles des langages de programmation

Travaux Dirigés n°2

Paul-André Melliès

<mellies@pps.jussieu.fr>

Dans cet exercice, nous construisons une catégorie monoïdale, qui est à l'origine d'un modèle très connu de la logique linéaire, appelé *sémantique de phase*.

Un monoïde $(M, \cdot, e)$ est un ensemble muni d'une loi produit:

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \to & M \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

associative:

$$\forall x, y, z \in M, \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

et d'un élément unité e:

$$\forall x \in M, \qquad x \cdot e = x = e \cdot x.$$

Nous définissons la catégorie P comme suit: elle a pour objets les sous-ensembles du monoïde $(M, \cdot, e)$, avec un morphisme unique

$$X \to Y$$

entre deux tels sous-ensembles X et Y lorsque X est sous-ensemble de Y.

Question 1. Montrer que la catégorie P dispose d'un objet initial, d'un objet terminal, et que l'intersection de deux sous-ensembles X et Y:

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ et } z \in Y\}$$

définit leur produit cartésien.

Question 2. Si X et Y sont deux sous-ensembles de M, on définit:

$$X \otimes Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Montrer que $\otimes$ définit une catégorie monoïdale. Quel en est l'objet unité 1 ?

Question 3. Montrer que la catégorie P est monoïdale fermée, au sens où il existe, pour tout sous-ensemble X et Y de M, un sous-ensemble $X \multimap Y$ de M tel que:

$$\mathbf{Hom}_P(X \otimes Y, Z) \cong \mathbf{Hom}_P(Y, X \multimap Z).$$

Donner une définition explicite de ce sous-ensemble $X \multimap Z$. Et expliquer pourquoi il est inutile dans ce cas de s'assurer des diagrammes de naturalité donnés en cours.

Question 4. Montrer que deux objets sont isomorphes dans P si et seulement si ils sont égaux. En déduire que la catégorie P est symétrique si et seulement si le monoïde M est commutatif.

Question 5. Soient X et $\perp$ deux sous-ensembles quelconques de M. Déduire du cours que X est sous-ensemble de $(X \multimap \perp) \multimap \perp$ lorsque le monoïde M est commutatif.

Question 6. Donner un exemple de monoïde commutatif M et de sous-ensembles X et $\perp$ tels que $X \neq (X \multimap \perp) \multimap \perp$.