Master Parisien de Recherche en Informatique

Modèles des langages de programmation

Travaux Dirigés n°3

Paul-André Melliès

<mellies@pps.jussieu.fr>

Nous avons vu en cours la construction exponentielle, qui à tout espace de cohérence $A = (|A|, \frown\!\!\!\!\!\smile_A)$ associe l'espace de cohérence $!A$,

- dont les éléments de la trame $|!A|$ sont les cliques finies de A,
- où deux éléments $u, v \in |!A|$ de la trame sont cohérents lorsque leur union (en tant que cliques) est une clique de A.

Ici, on s'intéresse à une décomposition de cette modalité exponentielle, au moyen de la modalité de suspension S qui à tout espace de cohérence A associe l'espace de cohérence SA dont les éléments de la trame $|SA|$ sont

- les cliques singleton $[a]$ contenant exactement un élément a de la trame $|A|$,
- la clique vide de A, le plus souvent notée $*_A$ dans ce cadre.

La relation de cohérence de SA est définie comme la relation de cohérence de A sur les cliques singleton:

$$\forall a_1, a_2 \in |A|, \qquad [a_1] \frown\!\!\!\!\!\smile_{SA} [a_2] \iff a_1 \frown\!\!\!\!\!\smile_A a_2$$

avec l'élément $*_A$ cohérent avec tous les autres éléments de la trame:

$$\forall a \in |A|, \qquad *_A \frown\!\!\!\!\!\smile_{SA} [a].$$

Du point de vue logique, la modalité de suspension permet d'appliquer la règle d'affaiblissement à une formule modalisée – mais pas la règle de contraction.

Partie I

(1.) Montrer que

$$SA \quad \cong \quad A \mathbin{\&} 1$$

où 1 est l'espace de cohérence singleton. En déduire que tout morphisme

$$h \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad SA$$

est la donnée d'un morphisme

$$[h] \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

et d'une anti-clique de A, vue comme morphisme

$$\langle h \rangle \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad 1.$$

(2.) On note

$$\varepsilon_A \quad : \quad SA \to A$$

le morphisme défini par la projection du produit cartésien $A\&1$ sur sa première composante A. On note

$$\delta_A \quad : \quad SA \to SSA$$

le morphisme $\delta_A = id_A \mathbin{\&} \Delta$ (aussi parfois noté $\delta_A = A \mathbin{\&} \Delta$ en cours) où

$$\Delta \quad : \quad 1 \ \to \ 1\&1$$

est la diagonale associé à l'espace de cohérence 1.

Décrire explicitement Δ comme une *relation* entre les éléments de la trame de 1 et les éléments de la trame de 1&1. Puis décrire de la même manière les morphismes ε_A et δ_A pour un espace de cohérence A donné.

(3.) Montrer que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} & SSA \arrow[dr, bend left, "\varepsilon_{SA}"] & \\ SA \arrow[ur, bend left, "\delta_A"] \arrow[rr, "id_{SA}"] & & SA \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & SSA \arrow[dr, bend left, "S\varepsilon_A"] & \\ SA \arrow[ur, bend left, "\delta_A"] \arrow[rr, "id_{SA}"] & & SA \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} SSA \arrow[r, "\delta_{SA}"] & SSSA \\ SA \arrow[u, "\delta_A"] \arrow[r, "\delta_A"] & SSA \arrow[u, "S\delta_A"'] \end{tikzcd}$$

(4.) Pour tout morphisme

$$f \quad : \quad A \quad \rightarrow \quad B$$

associer un morphisme

$$Sf \quad : \quad SA \quad \rightarrow \quad SB$$

de telle manière que S définisse un foncteur

$$S \quad : \quad \mathbf{Coh} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Coh}$$

dans la catégorie **Coh** des espaces de cohérence – ce qu'on montrera brièvement.

(5.) Montrer que ε et δ définissent des transformations naturelles

$$\varepsilon : S \rightarrow Id \qquad\qquad \varepsilon : S \rightarrow SS$$

où Id est le foncteur identité $A \mapsto A$ de la catégorie **Coh**.

(6.) Des question (3.) (4.) et (5.) on déduit que S définit une comonade (notion vue en cours). On appelle *coalgèbre* d'une telle comonade S une paire (A, h_A) constituée

- d'un espace de cohérence A,
- d'un morphisme $h_A : A \rightarrow SA$,

faisant commuter les diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd} & SA \arrow[dr, bend left, "\varepsilon_A"] & \\ A \arrow[ur, bend left, "h_A"] \arrow[rr, "id_A"] & & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} SA \arrow[r, "\delta_A"] & SSA \\ A \arrow[u, "h_A"] \arrow[r, "h_A"] & SA \arrow[u, "Sh_A"'] \end{tikzcd}$$

Nous savons par la question (1.) que tout morphisme

$$h_A \quad : \quad A \quad \rightarrow \quad SA \tag{1}$$

est caractérisé par ses deux projections $[h_A]$ et $\langle h_A \rangle$ sur les espaces de cohérence A et 1. Montrer par un raisonnement *purement diagrammatique* qu'une coalgèbre (A, h_A) correspond exactement à un morphisme (1) pour lequel le morphisme

$$[h_A] \quad : \quad A \quad \rightarrow \quad A$$

est le morphisme identité id_A. [Note: un raisonnement direct est possible, et sera accepté, mais il est a priori plus long.]

(7.) On déduit des questions (1.) et (5.) qu'une coalgèbre (A, h_A) est la donnée d'une anti-clique de l'espace de cohérence A, produite par la composée:

$$A \xrightarrow{h_A} SA \xrightarrow{\pi} 1$$

où π est la projection de $SA = A\&1$ sur sa seconde composante. Intuitivement, l'anti-clique $\langle h_A \rangle$ décrit la procédure que la coalgèbre de suspension (A, h_A) servira à tout programme de type $\Gamma, A \vdash B$ qui déciderait de ne pas utiliser son entrée A.

Maintenant, on définit un morphisme de coalgèbre

$$f \quad : \quad (A, h_A) \quad \rightarrow \quad (B, h_B)$$

entre deux coalgèbres (A, h_A) et (B, h_B) comme un morphisme

$$f \quad : \quad A \quad \rightarrow \quad B \tag{2}$$

entre les espaces de cohérence sous-jacents, faisant commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
SA \arrow[r, "Sf"] & SB \\
A \arrow[u, "h_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, "h_B"']
\end{tikzcd}$$

dans la catégorie **Coh**.

Montrer qu'un morphisme (2) est un morphisme de coalgèbre si et seulement si le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\langle h_A \rangle"'] & & B \arrow[dl, "\langle h_B \rangle"] \\
& 1 &
\end{tikzcd}$$

dans la catégorie **Coh**.

Désormais, on appelle **SCoh** la catégorie dont les objets sont les coalgèbres sur la comonade S, et les morphismes sont les morphismes de coalgèbre.

(8.) Décrire explicitement la coalgèbre (A, ∂_A) pour laquelle $\langle \partial_A \rangle$ est l'anti-clique vide.

(9.) Montrer que pour tout espace de cohérence A, la paire (SA, δ_A) définit une coalgèbre, pour laquelle $\langle \delta_A \rangle$ est l'anti-clique singleton $[*_A]$.

(10.) Construire, pour toute coalgèbre (A, h_A) et espace de cohérence B, une bijection entre:

- les morphismes de A dans B,
- les morphismes de coalgèbre de (A, h_A) dans (SB, δ_B).

Note: cette bijection induit en fait une adjonction entre le foncteur d'oubli

$$\mathbf{SCoh} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Coh}$$

et le foncteur

$$\mathbf{Coh} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{SCoh}$$

qui a tout espace de cohérence associe la coalgèbre (SA, δ_A).

Partie II

Ici, on introduit la modalité de duplication D qui à tout espace de cohérence $A = (|A|, \frown_A)$ associe l'espace de cohérence DA

- dont les éléments de la trame $|DA|$ sont les cliques finies *non vides* de A,

- où deux éléments $u, v \in |DA|$ de la trame sont cohérents lorsque leur union (en tant que cliques) est une clique de A.

De la même manière que la modalité exponentielle, la modalité de duplication définit une comonade sur la catégorie **Coh**. Du point de vue logique, la modalité de duplication permet d'appliquer la règle de contraction à une formule modalisée – mais pas la règle d'affaiblissement.

(11.) Montrer que pour tout espace de cohérence A,

$$!A = SD(A)$$

mais expliquer pourquoi l'égalité

$$!A = DS(A)$$

est en général fausse.

(12.) Pour tout espace de cohérence A, considérons le morphisme

$$\lambda_A \quad : \quad SDA \quad \rightarrow \quad DSA$$

dans la catégorie **Coh**, défini comme suit:

$$\lambda_A \quad := \quad \begin{array}{c} \{(*_{DA}, [*_A])\} \\ \uplus \\ \{([[a_1, \cdots, a_k]], [[a_1], \ldots, [a_k]]) \mid a_1, \ldots, a_k \in |A|\} \\ \uplus \\ \{([[a_1, \cdots, a_k, *_A]], [[a_1], \ldots, [a_k]]) \mid a_1, \ldots, a_k \in |A|\}. \end{array}$$

On admettra ici que λ définit une transformation naturelle

$$\lambda \quad : \quad SD \quad \rightarrow \quad DS$$

et que les diagrammes suivants commutent dans la catégorie **Coh**:

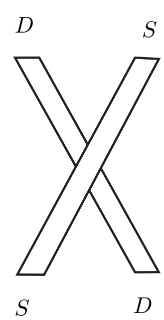
$$\begin{tikzcd} SDA \arrow[rr, "\lambda_A"] \arrow[d, "\delta^S_{DA}"'] & & DSA \arrow[d, "D\delta^S_A"] \\ SSDA \arrow[r, "S\lambda_A"] & SDSA \arrow[r, "\lambda_{SA}"] & DSSA \end{tikzcd} \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd}
SDA \arrow[rr, "\lambda_A"] \arrow[d, "S\delta^D_A"'] & & DSA \arrow[d, "\delta^D_{SA}"] \\
SDDA \arrow[r, "\lambda_{DA}"] & DSDA \arrow[r, "D\lambda_A"] & DDSA
\end{tikzcd} \tag{4}$$

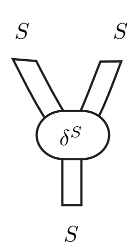
$$\begin{tikzcd}
SDA \arrow[rr, "\lambda_A"] \arrow[dr, "\varepsilon^S_{DA}"'] & & DSA \arrow[dl, "D\varepsilon^S_A"] \\
& DA &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

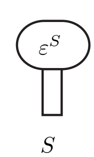
$$\begin{tikzcd}
SDA \arrow[rr, "\lambda_A"] \arrow[dr, "S\varepsilon^D_A"'] & & DSA \arrow[dl, "\varepsilon^D_{SA}"] \\
& SA &
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Il est possible de dessiner la transformation naturelle λ en diagramme de cordes:

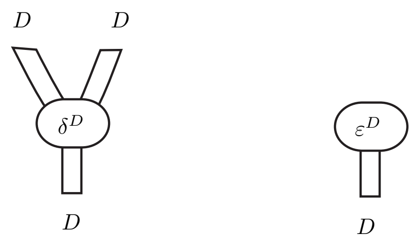


Les transformations naturelles de la comonade S sont décrits de la sorte:



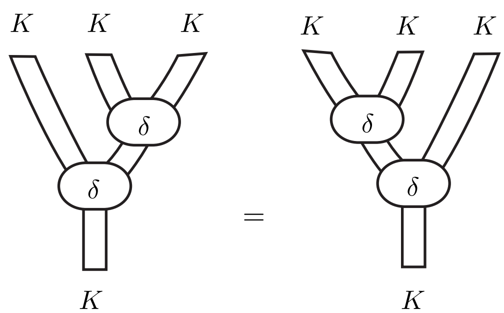


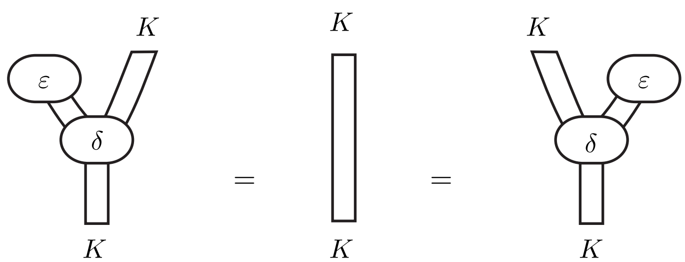
ainsi que ceux de la comonade D:



Dessiner les égalités entre diagrammes de corde données par les diagrammes de cohérence (3), (4), (5), (6) satisfaite par la loi de distributivité λ.

(13.) Les diagrammes de cohérence (vus en cours) décrivant une comonade (K, δ, ε) sur une catégorie $\mathbb{C}$ s'écrivent





Montrer par une série de diagrammes de cordes que la composée SD des deux comonades S et D définit bien une comonade.