Master Parisien de Recherche en Informatique

Modèles des langages de programmation

Travaux Dirigés n°6

Paul-André Melliès

<mellies@pps.jussieu.fr>

Dans tout l'exercice, on considérera des jeux alternés. Un jeu alterné A est défini par un triplet

$$A = (M_A, \lambda_A, P_A)$$

où:

- M_A est un ensemble dont les éléments sont appelé des coups,
- $\lambda_A : M_A \longrightarrow \{+1, -1\}$ est une fonction dite de polarisation,
- P_A est un ensemble de mots finis sur l'alphabet M_A.

On dit que m est un coup Joueur lorsque $\lambda_A(m) = +1$ et Opposant lorsque $\lambda_A(m) = -1$. On note $s; t$ la concaténation de deux mots s et t.
On demande que:

- le mot vide ϵ est élément de P_A,
- si $s; m \in P_A$ alors $s \in P_A$,
- tout mot $m_1; \cdots; m_k$ dans P_A est (1) soit vide, (2) soit alterné, et commence par un coup Opposant:

$$\forall i \in [1, ..., k], \qquad \lambda_A(m_i) = (-1)^i$$

- tout mot $m_1; \cdots; m_k$ dans P_A est sans répétition:

$$\forall i, j \in [1, ..., k], \qquad i \neq j \Rightarrow m_i \neq m_j$$

On appelle *partie* tout mot élément de P_A.

Une stratégie $\sigma : A$ est défini comme un ensemble de parties de A de longueur paire, telles que

- la partie vide ϵ appartient à σ,
- si $s; m; n \in \sigma$ alors $s \in \sigma$,
- si $s; m; n_1 \in \sigma$ et $s; m; n_2 \in \sigma$ alors $n_1 = n_2$.

Si A et B sont des jeux alternés, le jeu alterné $A \multimap B$ est donné par:

- $M_{A \multimap B} = M_A + M_B$,
- $\lambda_{A \multimap B} = -\lambda_A + \lambda_B$,
- $P_{A \multimap B}$ contient tous les mots s sur l'alphabet $M_{A \multimap B}$ tels que:
  1. s est alterné et commence par un coup Opposant,
  2. les projections $s \upharpoonright A$ et $s \upharpoonright B$ sont des parties de A et B respectivement.

Question 1. Montrer que $A \multimap B$ définit un jeu alterné. En donner l'automate de polarité (voir les notes de cours d'Olivier).

Question 2. Soient A, B, C trois jeux alternés, s une partie de $A \multimap B$ et t une partie de $B \multimap C$, telles que:

$$s \upharpoonright B = t \upharpoonright B$$

Montrer qu'il existe un unique mot u sur $M_A + M_B + M_C$ tel que:

$$u \upharpoonright A, B = s \qquad u \upharpoonright B, C = t \tag{1}$$

On pourra procéder de la manière suivante. On notera N_A l'ensemble des coups de $s \upharpoonright A$, N_B l'ensemble des coups de $s \upharpoonright B = t \upharpoonright B$, et N_C l'ensemble des coups de $t \upharpoonright C$. On introduira ensuite les ordres totaux $\leq_s$ sur $N_A + N_B$ et $\leq_t$ sur $N_B + N_C$, de chaines maximales s et t respectivement.

a. Montrer que la cloture transitive de $(\leq_s \cup \leq_t)$ définit un ordre $\leq_{st}$ sur $N_A + N_B + N_C$;

b. Montrer que $\leq_{st}$ a un seul minimum, et que ce minimum est le minimum de $\leq_t$, lorsque la partie t n'est pas vide;

c. Montrer que pour tout coup $m \in N_A + N_B + N_C$, il existe au plus un coup $n \in N_A + N_B + N_C$ minimal au dessus de m pour l'ordre $\leq_{st}$. On procèdera par cas, en utilisant un automate de polarité;

d. Déduire des points b. et c. que l'ordre $\leq_{st}$ est total;

e. En déduire l'existence d'un mot u tel que (1) et montrer qu'un tel mot u est unique;

Question 4. Montrer que le mot u construit dans la question 3. a pour projection $u \upharpoonright A, C$ une partie de $A \multimap C$.

Question 5. Soient $\sigma : A \multimap B$ et $\tau : B \multimap C$ deux stratégies. On définit un ensemble de mots sur $M_A + M_C$:

$$\sigma; \tau = \{u \upharpoonright A, C \mid u \text{ mot sur } M_A + M_B + M_C \text{ et } u \upharpoonright A, B \in \sigma \text{ et } u \upharpoonright B, C \in \tau\}. \tag{2}$$

Montrer que $\sigma; \tau$ définit une stratégie de $A \multimap C$.

Question 6. Utiliser la question 4. pour montrer que la loi de composition est associative, c'est-à-dire que

$$(\sigma; \tau); \mu = \sigma; (\tau; \mu)$$

pour tout triplet σ, τ, μ de stratégies de $A \multimap B$ et $B \multimap C$ et $C \multimap D$ respectivement. On pourra commencer par montrer l'inclusion:

$$(\sigma; \tau); \mu \subset \sigma; (\tau; \mu)$$

puis l'inclusion réciproque de manière similaire.

Question 7. Pour tout jeu alterné A, la stratégie identité id_A du jeu $A \multimap A$ est définie par l'ensemble des parties $s \in P_A$ telles que:

- s est de longueur paire,
- tout préfixe t de s de longueur paire vérifie:

  $$t \upharpoonright A_1 = t \upharpoonright A_2$$

  où les indices $1, 2$ indiquent le composant du jeu $A_1 \multimap A_2$ sur lequel le mot t est projeté.

Montrer que

$$id_A; \sigma = \sigma = \sigma; id_B$$

pour toute stratégie σ de $A \multimap B$.

Question 8. Déduire des questions 6. et 7. que la loi de composition et les stratégies identité id_A définissent une catégorie $\mathcal{S}$ dont les objets sont les jeux alternés, et dont les morphismes $A \longrightarrow B$ sont les stratégies de $A \multimap B$.

Question 9. Déduire de la question 2. que les égalités

$$Rel(A) = P_A$$

$$Rel(\sigma) = \{(s,t) \in P_A \times P_B, \exists u \in \sigma, s = u \upharpoonright A \text{ et } t = u \upharpoonright B\}$$

définissent un foncteur $Rel(-)$ de la catégorie $\mathcal{S}$ vers la catégorie des ensembles et relations.

Question 10. Nous revenons aux questions 2. et 3. et analysons ce qui arrive lorsqu'on remplace les jeux alternés par les jeux non-alternés vus en cours.

Soient A, B, C trois jeux non-alternés, et s une partie de $A \multimap B$ et t une partie de $B \multimap C$, telles que:

$$s \upharpoonright B = t \upharpoonright B$$

a. Montrer qu'il existe un mot u sur $M_A + M_B + M_C$ tel que:

$$u \upharpoonright A, B = s \qquad u \upharpoonright B, C = t \tag{3}$$

On pourra utiliser la méthode proposée en question 2.a.

b. Par contre, l'unicité n'est pas vérifiée. Donner deux mots u_1 et u_2 vérifiant (3) lorsque s et t sont les parties suivantes dans les jeux $A \multimap B$ et $B \multimap C$:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \multimap & B & \quad & B & \multimap & C \\ & & & & & & m:-1 \\ & & & & & & n:+1 \\ p:-1 & & & & & & \\ q:+1 & & & & & & \end{array} \tag{4}$$

c. Soient s et t les parties suivantes dans les jeux $A \multimap B$ et $B \multimap C$:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \multimap & B & \qquad & B & \multimap & C \\
 & & & & & & m:-1 \\
 & & m':-1 & & m':+1 & & \\
 & & n':+1 & & n':-1 & & \\
p:-1 & & & & & & \\
q:+1 & & & & & & \\
 & & m'':-1 & & m'':+1 & & \\
 & & n'':+1 & & n'':-1 & & \\
 & & & & & & n:+1
\end{array} \tag{5}$$

Montrer qu'il existe un et un seul mot u vérifiant (3) pour ces parties s et t. Montrer que la partie $u \restriction A, C$ n'est pas alternée.

d. En déduire qu'il existe une stratégie σ de $A \multimap B$ et une stratégie τ de $B \multimap C$ telles que:

$$s \in \sigma \qquad\qquad t \in \tau$$

avec

$$s \restriction B = t \restriction B$$

et pourtant

$$u \restriction A, C \notin \sigma; \tau$$

pour les parties s, t et u de la question 10.b.

e. En déduire que la méthode de démonstration de l'associativité de la composition (question 6.) ne marche plus telle quelle dans le cas des jeux non-alternés.

Question 11. Adapter l'exemple (5) aux jeux non-alternés *négatifs* et en déduire que la construction de la question 9 ne définit pas un foncteur de la catégorie $\mathcal{G}$ des jeux non-alternés négatifs, vers la catégorie des ensembles et relations.