Examen 2004-2005

Modèles des langages de programmation: domaines, catégories, jeux
Master Parisien de Recherche en Informatique

Le 17 Février 2005 de 16h à 19h

DOMAINES

Exercice 1.

PCF unaire est le λ-calcul simplement typé avec un seul type de base o, et trois constantes: $\Omega, Top : o$ et $And : o \to (o \to o)$. La sémantique opérationnelle de And est définie par:

$$And\ M\ N \ \to^* \begin{cases} Top & \text{si } M \to^* Top \text{ et } N \to^* Top \\ \Omega & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient $(\{\mathcal{C}^\sigma\}, [\![]\!]^{\mathcal{C}})$,$(\{\mathcal{S}^\sigma\}, [\![]\!]^{\mathcal{S}})$ (le modèle continu et le modèle stable de PCF unaire, respectivement), définis par:

- $\mathcal{C}^o = \mathcal{S}^o = \{\perp < \top\}$
- $\mathcal{C}^{\sigma\to\tau}$ est l'ensemble des fonctions monotones de $\mathcal{C}^\sigma$ dans $\mathcal{C}^\tau$, ordonné point par point ($f \le g$ si $\forall x \in \mathcal{C}^\sigma\ f(x) \le g(x)$).
- $\mathcal{S}^{\sigma\to\tau}$ est l'ensemble des fonctions stable de $\mathcal{S}^\sigma$ dans $\mathcal{S}^\tau$, ordonné par l'ordre stable ($f \le g$ si $\forall x \le y \in \mathcal{S}^\sigma\ f(x) = f(y) \wedge g(x)$).
- $[\![\Omega]\!]^{\mathcal{C}} = [\![\Omega]\!]^{\mathcal{S}} = \perp$, $[\![Top]\!]^{\mathcal{C}} = [\![Top]\!]^{\mathcal{S}} = \top$.
- $[\![And]\!]^{\mathcal{C}}\ a\ b = [\![And]\!]^{\mathcal{S}}\ a\ b = \begin{cases} \top & \text{si } a = \top \text{ et } b = \top \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$

On définit deux hiérachies de types: les *types du premier ordre*, O_n, et les *types pures* P_n, $n \in N$:

- $O_0 = P_0 = o$

- $O_{i+1} = o \to O_i$
- $P_{i+1} = P_i \to o$

Question 1. Décrire les ensembles partiellement ordonnés qui interprètent les types $O_1 = P_1$, O_2 et P_2 dans les modèles continu et stable (il s'agit de dessiner les diagrammes de Hasse de ces six ordres partiels; pour en identifier les éléments, vous pouvez utiliser des abréviations telles que id pour la fonction idéntité, $\lambda x\ \top$ pour la fonction constante $\top$, $\lambda xy\ x \vee y$ pour la fonction binaire qui vaut $\top$ si un de ses argument est $\top$, etc...).

Question 2.

- Exhiber un type du premier ordre σ et un élément $f \in \mathcal{C}^\sigma$ tel que f n'est pas définissable par un terme de PCF unaire.
- Exhiber un type pure τ et un élément $f \in \mathcal{S}^\tau$ tel que f n'est pas définissable par un terme de PCF unaire.

Question 3.

- Montrer que tous les éléments du modèle stable, aux types du premier ordre, sont définissables.
- Montrer que tous les éléments du modèle continu, aux types purs, sont définissables.

Question 4 (facultative). Comment pourrait-on définir un "modèle quotient" $\{\mathcal{C}/\mathcal{S}\}^\sigma$, à partir de la relation logique entre $\{\mathcal{C}\}^\sigma$ et $\{\mathcal{S}\}^\sigma$ qui est l'identité au type o?

Que pourrait-on dire/conjecturer sur la définissabilité des éléments de ce modèle quotient?

JEUX

Exercice 2.

Soient

$$\begin{array}{rcl} F & = & \lambda n(\texttt{let}\ z = n\ \texttt{in}\ (\texttt{case}\ z\ \texttt{ff}\ \texttt{else}\ (g)(\texttt{pred}\ z))) \\ G & = & \lambda n(\texttt{let}\ z = n\ \texttt{in}\ (\texttt{case}\ z\ \texttt{t}\ \texttt{else}\ (f)(\texttt{pred}\ z))) \end{array}$$

deux termes mutuellement récursifs, dont le type est donné par:

$$\begin{array}{rcl} f : \texttt{nat} \to \texttt{bool}, g : \texttt{nat} \to \texttt{bool} & \vdash & F : \texttt{nat} \to \texttt{bool} \\ f : \texttt{nat} \to \texttt{bool}, g : \texttt{nat} \to \texttt{bool} & \vdash & G : \texttt{nat} \to \texttt{bool} \end{array}$$

On construit le point fixe pour F de la manière suivante:

$$\mathcal{H} = (\texttt{fixpt}\ \lambda f(F\ f\ (G'\ f)))$$

où

$$G' f = (\texttt{fixpt}\ \lambda g(G\ f\ g)).$$

Calculez les stratégies interprétant F, G' et $\mathcal{H}$ dans les jeux d'arènes. Quelle fonction $\mathcal{H}$ calcule-t-elle?

Exercice 3.

Considérez les termes Y_2 and X_2 de PCF unaire

$$\begin{array}{rcl} f : (o \to o \to o) \to o & \vdash & (f)(\lambda x_1 x_2\ (f)\lambda y_1 y_2\ (And\ x_1\ y_2) : o \\ f : (o \to o \to o) \to o & \vdash & (f)(\lambda x_1 x_2\ (f)\lambda y_1 y_2\ (And\ x_1\ x_2) : o \end{array}$$

On interprète le type o par l'arène avec une question et une seule réponse; $And\ x_1\ x_2$ évalue d'abord x_1 et ensuite x_2 (ssi x_1 termine).

Trouvez une stratégie σ tel que $\sigma ; [\![Y_2]\!]$ converge et $\sigma ; [\![X_2]\!]$ diverge, c'est-à-dire $\sigma ; [\![Y_2]\!] = [\![Top]\!]$ et $\sigma ; [\![X_2]\!] = [\![\Omega]\!]$.

Appliquez le théorème de définissabilité pour trouver un terme clos de PCF unaire qui définit σ et ainsi donnez un contexte qui sépare $(\lambda f\ Y_2)$ et $(\lambda f\ X_2)$.

Exercice 4. (facultatif)

Pour $\sigma : A \Rightarrow B$ et $\tau : B \Rightarrow C$ deux stratégies déterministes (pas forcément innocentes), démontrez le *lemme de témoin unique*: pour tout $s \in \sigma ; \tau$ il existe un *unique* $u \in \mathcal{I}(A, B, C)$ tel que $s = u \upharpoonright A, C$ et aussi $u \upharpoonright A, B \in \sigma$ et $u \upharpoonright B, C \in \tau$.

En déduire que la stratégie $\sigma ; \tau$ est aussi déterministe.

Exercice 5.

Un monoïde $(M, \cdot, e)$ est un ensemble muni d'une loi produit:

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \rightarrow & M \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

associative:

$$\forall x, y, z \in M, \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

et d'un élément unité e:

$$\forall x \in M, \qquad x \cdot e = x = e \cdot x.$$

Nous définissons la catégorie P comme suit: elle a pour objets les sous-ensembles du monoïde $(M, \cdot, e)$, avec un morphisme unique

$$X \rightarrow Y$$

entre deux tels sous-ensembles X et Y lorsque X est sous-ensemble de Y.

Question 1. Montrer que la catégorie P dispose d'un objet initial, d'un objet terminal, et que l'intersection de deux sous-ensembles X et Y:

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ et } z \in Y\}$$

définit leur produit cartésien.

Question 2. Si X et Y sont deux sous-ensembles de M, on définit:

$$X \otimes Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Montrer que $\otimes$ définit une catégorie monoïdale. Quel en est l'objet unité 1 ?

Question 3. Montrer que la catégorie P est monoïdale fermée, au sens où il existe, pour tout sous-ensemble X et Y de M, un sous-ensemble $X \multimap Y$ de M tel que:

$$\mathbf{Hom}_P(X \otimes Y, Z) \cong \mathbf{Hom}_P(Y, X \multimap Z).$$

Donner une définition explicite de ce sous-ensemble $X \multimap Z$. Et expliquer pourquoi il est inutile dans ce cas de s'assurer des diagrammes de naturalité donnés en cours.

Question 4. Montrer que deux objets sont isomorphes dans P si et seulement si ils sont égaux. En déduire que la catégorie P est symétrique si et seulement si le monoïde M est commutatif.
Question 5. Soient X et $\perp$ deux sous-ensembles quelconques de M. Déduire du cours que X est sous-ensemble de $(X \multimap \perp) \multimap \perp$ lorsque le monoïde M est commutatif.
Question 6. Donner un exemple de monoïde commutatif M et de sous-ensembles X et $\perp$ tels que $X \neq (X \multimap \perp) \multimap \perp$.