DEA Programmation
Preuves constructives
Examen
Jeudi 18 Décembre 1997
Durée 2h.
Tous documents autorisés.

Exercice 1 (4 points)

(1) Donner une démonstration en déduction naturelle intuitionniste du premier ordre de la proposition

$$(P\ 0) \Rightarrow (\forall x\ ((P\ x) \Rightarrow (P\ (S\ x)))) \Rightarrow (P\ (S\ (S\ 0)))$$

(2) Exprimer cette démonstrations par un terme du $\lambda\Pi$-calcul.

Exercice 2 (6 points)

Soit la fonction $n \mapsto 2^n$.
(1) Cette fonction est-elle exprimable dans le λ-calcul simplement typé sur les entiers de Peano ?
(2) Peut-on démontrer l'existence de cette fonction dans la théorie des types simples ?
(3) Cette fonction est-elle exprimable dans le λ-calcul simplement typé sur les entiers de Church ?
(4) Cette fonction est-elle exprimable dans la théorie des types de Martin-Löf ?
(5) Peut-on démontrer l'existence de cette fonction dans la théorie des types de Martin-Löf ?
(6) Cette fonction est-elle exprimable dans le système F ?

Exercice 3 (10 points)

Les questions de cet exercice sont largement indépendantes.
La fonction "double" est définie par les équations suivantes

$$(d\ 0) = 0$$
$$(d\ (S\ x)) = (S\ (S\ (d\ x))$$

(1) Donner une définition de cette fonction dans la théorie des types de Martin-Löf.
(2) Soit s un terme-preuve,dans la théorie des types de Martin-Löf, du théorème

$$\forall v\ \forall w\ ((v = w) \Rightarrow (S\ v) = (S\ w))$$

Donner des termes-preuves a et b des propositions

$$\forall z\ ((x = (d\ z)) \Rightarrow \exists y\ ((S\ x) = (d\ y) \vee (S\ x) = (S\ (d\ y))))$$
$$\forall z\ ((x = S(d\ z)) \Rightarrow \exists y\ ((S\ x) = (d\ y) \vee (S\ x) = (S\ (d\ y))))$$

(3) Donner un terme-preuve t de la proposition

$$\forall x\ \exists y\ ((x = (d\ y)) \vee (x = (S\ (d\ y))))$$

(4) Quel est le type du terme $(t\ (S\ (S\ (S\ (S\ 0)))))$?
(5) Quelle est la forme normale du terme $(\pi_1\ (t\ (S\ 0)))$?
(6) Quel est le type du terme $f = \lambda x\ (\pi_1\ (t\ x))$?
(7) Quel est forme normale du terme $(f\ (S\ (S\ (S\ (S\ (S\ 0))))))$?