DEA Programmation
Preuves constructives
Examen
Lundi 4 Janvier 1999
Durée 2h.
Tous documents autorisés

Exercice 1 (6 points)

(1) Donner une démonstration en déduction naturelle intuitionniste du premier ordre des propositions

- $\forall x\ ((\forall y\ (P\ y)) \Rightarrow (P\ x))$
- $(P\ 0) \Rightarrow \forall x\ ((P\ x) \Rightarrow (P\ (S\ x)))) \Rightarrow (P\ (S\ (S\ 0)))$
- $(P\ 0) \Rightarrow (P\ 0) \Rightarrow (P\ 0)$

(2) Exprimer ces démonstrations par un terme du $\lambda\Pi$-calcul.

Exercice 2 (4 points)

Soit $\Gamma = A \Rightarrow B \Rightarrow C, B \Rightarrow A, B$. On donne la démonstration en déduction naturelle suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma A \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C \quad \Gamma A \vdash A}{\Gamma A \vdash B \Rightarrow C} \quad \Gamma A \vdash B}{\Gamma A \vdash C}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow C} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B \Rightarrow A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash C}$$

(1) Cette démonstration est-elle sans coupures ?
(2) Dans quel λ-calcul peut-on exprimer cette démonstration ?
(3) Exprimer cette démonstration par un terme du λ-calcul.
(4) Quelle est la forme normale de ce terme ?

Exercice 3 (10 points)

(1) Donner un terme-preuve t de la proposition

$$\forall x\ \exists y\ ((x = 0) \vee (x = S(y)))$$

(2) Quel est le type du terme $(t\ (S\ (S\ (S\ (S\ 0)))))$?
(3) Quelle est la forme normale du terme $(\pi_1\ (t\ (S\ (S\ (S\ (S\ 0))))))$?
(4) Quel est le type du terme $f = \lambda x\ (\pi_1\ (t\ x))$?
(5) Quelle est la forme normale du terme $(f\ (S\ (S\ (S\ (S\ 0)))))$?
(6) Monsieur Bug, expert en méthodes formelles, demande à deux stagiaires de donner chacun un terme-preuve de la proposition

$$\forall x\ \exists y\ ((x = 0) \vee (x = S(y)))$$

soient t et u ces deux termes. Il parie € 100 avec ses stagiaires que pour tout entier n, les formes normales des termes $(\pi_1\ (t\ n))$ et $(\pi_1\ (u\ n))$ sont identiques. Est-il certain de gagner ?