Benjamin Werner

Benjamin.Werner@inria.fr

INRIA–Rocquencourt/Futurs

projet Logical

http://logical.inria.fr/~werner/

# $\boxed{\text{Logique d'Ordre Supérieur}}$

## Fonctions in Peano Arithmetic

Aucun moyen de définir de nouvelles fonctions (toujours le cas en logique du 1er ordre).

Comment exprimer :

$$\forall x, y, z, n \in \mathbb{N} \ . \ n > 2 \Rightarrow x^n + y^n \neq z^n \ ?$$

$$\forall x, y, z, n \ . \ n > 2 \Rightarrow x^n + y^n \neq z^n \ ?$$

$$n > 2 \ \equiv \ \exists p \ . \ S(S(0)) + p = n \quad a \neq b \ \equiv \ a = b \Rightarrow \bot$$

Comment faire pour l'exponantiation ?

Une “fonction” $f$ est représentée par un prédicat $F$ ssi :

$$\forall x, y, y' \ . \ F(x, y) \wedge F(x, y') \Rightarrow y = y'$$

$$\forall x, y \ . \ F(x, y) \Leftrightarrow f(x) = y$$

Théorème : Toute fonction récursive est représentable dans l'arithmétique de Peano.

Mais la preuve est compliquée

Donc, le prédicat représentant l'exponantiation est compliqué.

Un bon exemple de différence entre l'expressivité et la praticabilité d'un formalisme.

## Vers l'ordre supérieur

Tout devient plus facile si on autorise la quantification sur les prédicats :

$$\begin{aligned} \text{exp}(a,n,b) \equiv \forall P \ . \quad & P(a,0,1) \\ & \wedge(\forall c,i \ . \ P(a,i,c) \Rightarrow P(a,S(i),c*a)) \Rightarrow P(a,n,b). \end{aligned}$$

Maintenant, exp est le plus petit predicat tel que :

- $\text{exp}(a,0,1)$
- $\forall c,i \ . \ \text{exp}(a,i,c) \Rightarrow \text{exp}(a,S(i),c*a)$.

On montre par récurrence sur $b$ que :

$$\forall b, a \ . \ \exists! c \ . \ exp(a, b, c).$$

C'est un bon exercice

Plus généralement, on peut utiliser l'imprédicatvité pour définir les plus petit prédicat clos par des clauses

## Prédicats inductifs - exemple 2

L'ensemble des nombres pairs est le plus petit ensemble tel que :

| | |
|---|---|
| $0 \in \text{Even}$ | $\text{Even}(0)$ |
| $\forall n. n \in \text{Even} \Rightarrow n + 2 \in \text{Even}$ | $\text{Even}(n) \Rightarrow \text{Even}(S(S(n)))$ |

$$\text{Even}(n) \equiv \forall P. P(0) \wedge (\forall x. P(x) \Rightarrow P(S(S(x)))) \Rightarrow P(n).$$

La définition est en fait un principe de récurrence associé à l'ensemble des nombres pairs.