Probabilités et applications à l'algorithmique, TD numéro 4
Natacha Portier
mercredi 28 février 2001

Définitions : distributions de probabilités discrètes

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble dénombrable et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités. Une application X de Ω dans $\mathcal{X}$ est une **variable aléatoire** si $\{X = x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \Omega$.

Une fonction p de $\mathcal{X}$ dans $[0; 1]$ est une **distribution de probabilité** si

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$$

La distribution de probabilité de la variable aléatoire X est p si pour tout $x \in \mathcal{X}$ on a $p(x) = P(X = x)$.

La variable aléatoire X est un **vecteur de Bernouilli d'ordre** n **et de paramètre** p si : $p \in [0; 1]$ et $X = (X_1, ..., X_n) \in \{0; 1\}^n$ a la distribution de probabilité $p(x) = p^{h(x)}(1-p)^{n-h(x)}$ où $h(x)$ est le poids de Hamming de x :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Cela correspond à une suite de n lancers indépendants d'une pièce.

Si $\mathcal{X} = \mathbf{N}$ alors X est une **variable aléatoire de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si sa distribution de probabilité p vérifie :

$$p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \ (k \geq 0)$$

Si $\mathcal{X} = \{0; 1; \cdots; n\}$ la distribution définie par

$$p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ (0 \leq k \leq n)$$

où $p \in [0; 1]$ est la **distribution binomiale** $B(n; p)$ **d'ordre** n **et de paramètre** p.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathcal{X}$ et de distribution p et soit une application $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathrm{R}}$. Si f est à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}_+$ alors par définition $E[f(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)p(x)$. Si f est à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$ on définit $f^+(x) = max(0, f(x))$ et $f^-(x) = max(0, -f(x))$. On a $E[|f|] = E[f^+] + E[f^-]$. Si cette quantité est finie alors on dit que f est intégrable. Si $E[f^+]$ et $E[f^-]$ ne sont pas tous les deux infinis alors on dit que f est sommable et $E[f] = E[f^+] - E[f^-]$. Sinon $E[f]$ n'est pas définie et f n'est ni sommable ni intégrable.

Si la variable aléatoire X est intégrable alors sa moyenne est $m_X = E[X]$ et sa **variance** est $V(X) = \sigma_X^2 = E[X^2] - m_X^2]$. Sa racine carrée positive σ_X est appelée **écart-type** de X.

Question 1

Représenter graphiquement une distribution de Poisson pour $\lambda = 5$ et $\lambda = 10$. Représenter graphiquement une distribution binomiale $B(5; 0,25)$, $B(10; 0,5)$ et $B(20; 0,5)$ et calculer leur moyenne.

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire de Bernouilli et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Quelle est la loi de S_n ?

Question 2 : dispersion autour de la valeur moyenne

Montrer que si X est une variable aléatoire discrète de moyenne m_X finie alors

$$E[(X - m_X)^2] = E[X^2] - m_X^2$$

Question 3

Calculer la moyenne et la variance de la distribution de Poisson. Calculer la moyenne et la variance de la distribution binomiale d'ordre n et de paramètre p.

Question 4 : inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'espace dénombrable $\mathcal{X}$ et soit f une fonction de $\mathcal{X}$ dans $\bar{\mathrm{R}}$. Montrer que pour tout $a > 0$:

$$P(|f(x)| \geq a) \leq \frac{E[|f(X)|]}{a}$$

Question 5 : inégalité de Tchebychev

Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathcal{X}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - m_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

Question 6 : Approximation polynomiale de Bernstein

Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans R. Le polynôme de Bernstein associé est défini par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Nous allons montrer la suite des P_n converge uniformément vers f sur $[0; 1]$.

Question 6,1

Pour chaque $x \in [0; 1]$ on introduit une suite $(X_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $P(X_n = 1) = x$ et $P(X_n = 0) = 1 - x$. Donner la distribution de $S_n = X_1 + ... + X_n$. Calculer $E[f(S_n/n)]$.

Question 6,2

Borner $|P_n(x) - f(x)|$ en utilisant Tchebychev. Conclure.

Question 7 : Inégalité de Jensen

Soit Φ une fonction convexe définie sur un intervalle de R contenant toutes les valeurs d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans R. Supposons que X et $\Phi(X)$ sont intégrables. Montrer que :

$$\Phi(E[X]) \leq E[\Phi(X)]$$

Question 8 : loi faible des grands nombres

Considérons une suite infinie de lancers de pièce. On obtient une suite infinie de variables aléatoires $X_1, X_2, ...$ mutuellement indépendantes suivant une distribution de Bernouilli de meme paramètre p (probabilité de valoir 1). Soit $S_n = X_1 + ... + X_n$. Montrer que S_n/n tend vers p en probabilité, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) = 0$$

Question 9 : convergence en loi et le théorème des événements rares de Poisson

On considère une masse donnée d'uranium 238 comprenant des milliards d'atomes (n) et on cherche à calculer la loi du nombre Y de noyaux d'Hélium (rayonnement α) émis pendant un certain laps de temps que l'on prend assez court. On peut alors supposer que chaque noyau émet indépendemment des autres et que pendant ce laps de temps soit il n'émet rien avec une probabilité $1 - p_n$ soit il émet un noyau avec la probabilité p_n.

Donner la loi et la moyenne de $Y = S_n$.

On observe $E[Y] = \lambda$. Montrer que S_n converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson dont on donnera le paramètre.

Définition : Une suite (Y_n) converge en loi vers la variable Y si

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = P(Y \leq x)$$

pour tout point de continuité de la fonction $x \to P(Y \leq x)$. Dans le cas où les Y_n et Y ne prennent que des valeurs entières positives cela revient à dire que pour $lim_{n \to +\infty} P(Y_n = k) = P(Y = k)$ pour tout $k \geq 0$.

Remarque : Poisson s'est posé la question suivante : soit Y une variable aléatoire dont on sait qu'elle est la somme d'un nombre n très grand de variables aléatoires de

Bernouilli i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées). La seule donnée expérimentale étant la moyenne λ de Y, quel n choisir ? Dans l'exemple précédent, pour éviter de faire ce choix, on fait l'approximation $n = +\infty$.

Question 10 : l'aiguille de Buffon

Une ligne rigide est jetée au hasard sur un réseau de droites parallèles équidistantes de a. Nous allons calculer le nombre moyen de points d'intersection de la ligne et du réseau.

Les lignes du réseau sont appelées L_i où i est un entier relatif. On suppose la courbe posée sur un plan dont A et B sont des points distincts. Pour poser la courbe ¡¡au hasard¿¿ sur le réseau on commence par poser A entre L_0 et L_1 uniformément relativement à la distance à L_0 puis on choisit $\overrightarrow{AB}$ en choisissant au hasard de manière uniforme la valeur de l'angle qu'il fait avec les lignes.

Question 10,1

Trouver une courbe qui a toujours le meme nombre de points d'intersection avec le réseau.

Question 10,2

Calculer le nombre moyen de points d'intersection d'une aiguille de longueur l avec le réseau.

Question 10,3

La courbe C est approximée par une ligne brisée $P_n = M_0 ... M_n$ dont les sommets sont répartis uniformément sur la courbe. On note $N(C)$ (resp. $N(P_n)$) le nombre de points d'intersection de C (resp. de P_n) avec le réseau. On suppose que C est rectifiable et on admet que $E[N(P_n)]$ tend vers $E[N(C)]$.

Calculer $E[N(C)]$.