Indications

19 octobre 2007

1 Graphes aléatoires

1. $1-(1-p^2)^{n-2}$ (intersection de $n-2$ évènements indépendants).
2. C'est $p(1-(1-p^2)^{n-2})$ par indépendance.
3. $P[E_x] \leq (n-1)(1-p^2)^{n-2}$ ce qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
4. Fixons un sommets x. L'évênement "x n'est pas inclus dans un triangle" est inclus dans l'union de E_x et de l'évênement F_x : $\forall y \ \neg\{x, y\} \in E$. Or $P[F_x] = (1-p)^{n-1}$, ce qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Avec la question précédente on en déduit ("probabilité de l'union") que la limite cherchée est 1.
5. Soit E l'union de tous les E_x et F l'union de tous les F_x. Si $E \cup F$ n'est pas réalisé alors tout sommet est inclus dans un triangle. Mais $P(E) \leq nP(E_x)$ et $P(F) \leq nP(F_x)$ donc ces deux probabilités tendent encore vers 0. La limite cherchée est donc 1.
6. C'est $\binom{n}{3}p^3$ (linéarité de l'espérance).
7. On a
$$P[\exists x, y \ x \neq y \wedge \forall z \ \neg(\{z, x\} \in E \wedge \{z, y\} \in E)] \leq \binom{n}{2}(1-p^2)^{(n-2)}$$
(question 1 et probabilité de l'union) ce qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit que la première limite est 1.
On a $P[\text{diamètre}(G(n,p)) < 2] = P[G(n,p) \text{ est une clique}] = p^n$, ce qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit que la seconde limite est 1 également.

2 Pile ou Face ?

Source : Concrete Maths.

1. (a) $EX = \sum_{n\geq 1} P(X \geq n) = \sum_{n \geq 1} q^{n-1} = 1/(1-q) = 1/p$.
   (b) $H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)z^k$ mais $P(X = k) = q^{k-1}p$ pour $k \geq 1$, d'ou $H(z) = pz/(1-qz)$.
   On a $H'(z) = p/(1-qz)^2$ d'ou $EX = H'(1) = 1/p$.

2. On a $H''(z) = 2pq/(1-qz)^3$. La variance est donc égale à $H''(1)+H'(1)-H'(1)^2 = q/p^2$.
3. On a $P(Y=2) = p^2$ et pour $k \geq 1$,

$$P(Y=k+2) = pqP(Y=k) + qP(Y=k+1).$$

   Le résultat en découle en multipliant chaque membre par $k+2$, et en sommant terme à terme. On trouve $e = 1/p + 1/p^2$.
4. On multiplie maintenant chaque membre par z^{k+2} au lieu de $k+2$. On obtient

$$H(z) - p^2z^2 = pqz^2H(z) + qzH(z),$$

   d'ou $H(z) = p^2z^2/(1-qz-pqz^2)$.
   On a $H'(z) = (2p^2z - p^2qz^2)/(1-qz-pqz^2)^2$ d'ou $H'(1) = 1/p + 1/p^2$.
5. Voir le dessin.
6. $H_0 = qzH_0 + pzH_1$, $H_1 = qzH_0 + pzH_2$, $H_2 = pzH_2 + qz$ d'ou $H_0 = \frac{p^2qz^3}{(1-pz)(1-qz-pqz^2)}$. Le cas particulier : $z^3/(z^3-8z+8)$.
7. On a $p_1 = pp_2 + qp_3$, $p_2 = pp_2 + q$, $p_3 = pp_1$ (voir le dessin de la chaine). D'ou $p_A = p_1 = p/(1-pq)$. Cas particulier : $p_A = 2/3$.