Probabilités et applications, TD numéro 1
Natacha Portier
jeudi 17 janvier 2002

Question 1

Un restaurant chinois présente une carte comprenant 47 plats numérotés de 1 à 47 : 17 entrées, 20 plats princuipaux et 10 desserts. On prend au hasard trois numéros différents. Calculer la probabilité d'avoir un menu complet (sans tenir compte de l'ordre).

Question 2

L'Académie Française est composée de 40 académiciens : 38 hommes et 2 femmes. Tous les hommes ainsi que la seule femme parlant russe portent l'épée. Deux des hommes parlent russes. Une délégation de 5 académiciens est choisie au hasard pour une visite officielle à Moscou.

Calculer la probabilité $P(A)$ d'avoir au moins une femme dans la délégation.

Sachant qu'il y a au moins une femme calculer la probabilité $P(B)$ qu'il y ait 5 porteurs d'épée.

Sachant qu'il y a au moins une femme calculer la probabilité $P(C)$ pour qu'exactement 2 académiciens choisis parlent russes.

Question 3,1

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur Ω et P une probabilité sur $\mathcal{A}$. On se donne une famille finie $(A_1, \dots, A_n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$. Établir la formule suivante, dite formule de Poincaré (ou d'inclusion-exclusion pour les anglo-saxons) :

$$P(\cup_i A_i) = \Sigma_{i \in I} P(A_i) - \Sigma_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \Sigma_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots \\ + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots A_n)$$

Question 3,2 : application, dérangements

Une personne écrit à n correspondants des lettres différentes, et met au hasard les lettres dans les enveloppes. Calculer la probabilité de l'événement ¡¡une lettre au moins parvient à son destinataire¿¿. En donner une approximation pour n assez grand.

Question 4

On sait que 90 pourcent des sujets atteints d'une certaine maladie M portent le signe S. Dans la population générale 10 pourcent des sujets sont atteints de la maladie M. Parmi les sujets portant S, 40 pourcent sont atteints de cette maladie M.

Quelle est dans la population générale la probabilité qu'un sujet ait le signe S ?

Quelle est la probabilité qu'un sujet non atteint par la maladie M ne porte pas le signe S ?

Question 5

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques :
- la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100
- une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

La météo annonce la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. déterminer le temps le plus probable.

Question 6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On note M une partie de Ω ayant la propriété suivante :

$$\forall C \in \mathcal{A}\ C \subset M \Rightarrow P(C) = 0 \ et\ M \subset C \Rightarrow P(C) = 1$$

Montrer que M n'est pas dans $\mathcal{A}$.

On pose $\mathcal{A}_M = \{M \cap A, A \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $\mathcal{A}_M$ est une algèbre sur M et que l'on définit sans ambiguité une probabilité P' sur cette algèbre en posant $P(A) = P'(M \cap A)$.