Probabilités et applications à l'algorithmique
TD numéro 10 : processus de branchement : Galton-Watson
Natacha Portier
lundi 22 avril 2002

Question 1 : chaîne de Markov homogène avec bruit blanc

Soit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans un espace arbitraire F. Soit E un ensemble dénombrable et $f : E \times F \to E$ une fonction. Soit X_0 une variable aléatoire à valeur dans E indépendante des $\{Z_n\}_{n\geq 1}$. Montrer que la relation de récurrence suivante définit une chaine de Markov homogène :

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$$

Question 2 : somme aléatoire de variables aléatoires i.i.d.

Soit $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières et dont la fonction génératrice est g_Y. Soit T une variable aléatoire à valeurs entières indépendante des $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ et de fonction génératrice g_T. Calculer la fonction génératrice de :

$$X = \sum_{n=1}^{T} Y_n$$

En déduire l'espérance de X en fonction de celles de T et des Y_n.

Question 3 : Graphe d'une fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Soit $g : [0;1] \to \mathbf{R}$ un fonction définie par $g(x) = E[x^X]$.

Question 3,1

Montrer que g est croissante et convexe. Montrer en outre que si $P(X = 0) < 1$ alors g est strictement croissante et si $P(X \leq 1) < 1$ alors g est strictement convexe.

Question 3,2

Supposons $P(X \leq 1) < 1$. Montrer que si $E[X] \leq 1$ alors l'équation $g(x) = x$ a pour unique solution 1 dans $[0;1]$. Montrer que si $E[X] > 1$ alors l'équation a deux solutions dans $[0;1]$: $x = 1$ et $x = x_0 \in]0;1[$.

Question 4,1 : cas général

Soit $\{Z_n^{(j)}\}_{n\geq 1, j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières de foncttion génératrice g. Soit $Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, \dots)$ et X_n les variables définies par $X_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante :

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^k$$

Calculer la fonction génératrice du nombre X_n d'individus de la génération n et discuter de la probabilité d'extinction.

Question 4,2 : pourquoi la loi vient de changer

On suppose le nombre d'enfants mâles par homme dans la population française donné par la fonction génératrice suivante : $g_Z(x) = 0,3 + 0,5x + 0,18x^2 + 0,02x^3$ Quelle est la probabilité d'extinction d'un nom de famille issu d'un ancêtre commun ?