Probabilités et applications, TD numéro 2
Natacha Portier
lundi 4 février 2002

Définition
La probabilité de A sachant B est $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Question 1,1 : théorème de Bayes
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Soit $E_1, \ldots, E_n$ une partition finie de l'ensemble des événements Ω et soit $A \in \mathcal{A}$ tels que : $P(A) > 0$, $\forall i E_i \in \mathcal{A}$ et $P(E_i) > 0$. Montrer que pour tout i :

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i)P(A/E_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_k)P(A/E_k)}$$

Question 1,2
Un étudiant répond à une question où il y a à choisir entre m réponses dont une seule est la bonne. Soit p la probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il connaisse la réponse sachant qu'il a répondu correctement ?

Question 2
On fait une suite d'expériences identiques, indépendantes entre elles et à m issues possibles ($m \geq 1$) de probabilités respectives $p_1, \cdots, p_m$ ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). On appelle X le nombre d'essais nécessaires pour que chacun des m résultats soit obtenu au moins une fois.

Question 2,1

Montrer que pour tout entier n la probabilité $P(X > n)$ est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{m}(1-p_i)^n - \sum_{1 \leq i < j \leq m}(1-p_i-p_j)^n + \cdots \\ + (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{m-1} \leq m}(1-p_{i_1}-\cdots-p_{i_{m-1}})^n + (-1)^{m+1} 1_{n=0}$$

Question 2,2
En déduire $E(X)$ en utilisant $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$.

Question 2,3
Montrer que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}=C_m^1-\frac{1}{2}C_m^2+\cdots+(-1)^m\frac{1}{m-1}C_m^{m-1}+(-1)^{m+1}\frac{1}{m}C_m^m$$

Question 2,4

Dans le cas où les p_i sont tous égaux calculer l'espérance en utilisant l'égalité précédente.

Question 2,5

On suppose toujours que tous les p_i sont égaux. On appelle C_i le résultat de la $i^{ème}$ expérience. On dit que C_i est un succès si ce résultat n'avait pas encore été obtenu auparavant. En particulier C_1 et C_X sont toujours des succès.

On divise la suite des C_i en époques : la $i^{ème}$ époque commence avec l'expérience qui suit le $i^{ème}$ succès et finit avec le $(i+1)^{ème}$ succès. On note X_i le nombre d'expérience de la $i^{ème}$ époque. On a :

$$X=\sum_{i=0}^{m-1}X_i$$

Donner la loi de X_i. En déduire son espérance puis celle de X.

Question 3

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent chacune l'héritier de leur duché. Montrer que les évènements suivants sont indépendants deux à deux mais pas dans leur ensemble.
A={l'héritier d'Aquitaine est un garçon}
B={l'héritier de Bourgogne est un garçon}
C={les duchés vont pouvoir faire alliance en mariant les enfants attendus}

Question 6 : bon appétit

En Belgique on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football est composée de 7 Flamands et de 4 Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité pour qu'il soit flamand.