Probabilités et applications

Pascal Koiran

Mai 2004

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant. Soient $X_1, \ldots, X_m$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans un intervalle $[l, u]$. Alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\Pr[S - E[S] \geq \alpha m] \leq e^{-2\alpha^2 m/(u-l)^2},$$

avec $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$.

1 Pile ou Face

Soient τ et p des réels strictement positifs. On considère une suite infinie de tirage à pile ou face indépendants. On suppose que le premier tirage a lieu à l'instant 0, et qu'il s'écoule τ unités de temps entre deux tirages consécutifs. Pour chaque tirage on suppose que la probabilité d'obtenir un pile est égale à p.

1. Soit X l'instant du premier pile. Donnez la fonction de distribution $F_{p,\tau}$ de X.
2. Calculez l'espérance $E_{p,\tau}$ du nombre de piles obtenus dans l'intervalle de temps $[0, 1]$.
3. On pose $p = \lambda\tau$, avec $\lambda > 0$ un paramère fixé, et on fait tendre τ vers 0. Calculez $\lim_{\tau \to 0} E_{\lambda\tau,\tau}$.
4. Montrez que quand $\tau \to 0$, la fonction de distribution $F_{\tau,\lambda\tau}$ tend vers F_λ, où F_λ est une fonction de distribution "bien connue" qu'on calculera explicitement.

2 Des cosinus partout

Pour faire cet exercice on aura intérêt à se se souvenir de ses formules de trigonométrie, et notamment de la plus utile d'entre elles : $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$.

Pour un entier $N \geq 2$, on note $\mathbb{Z}_N$ l'ensemble des N entiers entre 0 et $N-1$. Etant donné $N \geq 3$ et $k_0 \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$, on note Z la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}_N$ telle que :

$$\Pr[Z = z] = \frac{\alpha}{2}(1 + \cos\frac{2\pi k_0 z}{N}). \tag{1}$$

1. Calculez la valeur de α pour laquelle l'équation (1) définit bien une distribution de probabilité (on montrera que $\alpha = 2/N$).

2. Pour un entier N donné, est-ce que la valeur du paramère k_0 est entièrement déterminée par la distribution de probabilité (1) ?
3. Soit $k \in \mathbb{Z}_N$ et $f(z) = \cos(2\pi kz/N)$. En supposant que nous ne sommes pas dans le cas où N est pair et k_0 égal à $N/2$, calculez l'espérance de la variable aléatoire $X = f(Z)$. On montrera notamment que $E[X] = 0$ sauf pour au plus 3 valeurs de k, qu'on déterminera.
4. Reprendre la question précédente dans le cas où N est pair et k_0 égal à $N/2$.
5. Dans la suite du problème on supposera que $k_0 < N/2$. On notera $Z_1, \ldots, Z_m$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même distribution que Z. Soit k un entier dans l'intervalle $]0, N/2[$, et $G(k) = \sum_{i=1}^{m} \cos(2\pi k Z_i/N)$. Montrez que si $k \neq k_0$ alors
$$\Pr[G(k) \geq m/4] \leq \epsilon(m)$$
et que si $k = k_0$ alors
$$\Pr[G(k) \leq m/4] \leq \epsilon(m),$$
où ϵ est une fonction qui tend vers l'infini quand m tend l'infini, qu'on déterminera explicitement.
6. Soit $\tilde{k}$ l'entier de l'intervalle $]0, N/2[$ qui maximise la fonction G. Montrez que si m est suffisament grand alors avec probabilité au moins 1/2, $\tilde{k}$ est unique et égal à k_0.

3 Algorithmique

1. Soit Q un polynôme de degré d en s variables à coefficients. Soit $m \geq 1$ un entier. Soit $X_1, \ldots, X_s$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribués dans l'ensemble $[m] = \{1, \ldots, m\}$ des entiers compris entre 1 et m. Montrez que si Q n'est pas identiquement nul alors
$$\Pr[Q(X_1, \ldots, X_s) = 0] \leq d/m. \tag{2}$$
Indication : on pourra raisonner par récurrence sur s.
2. Montrez que pour tout $s \geq 1$ et tout $d \geq 1$, si $m \geq d$ alors il existe un polynôme Q non identiquement nul pour lequel la borne (2) est atteinte.
3. Soit $G = (U, V, E)$ un graphe biparti : U et V sont donc deux ensembles disjoints de sommets, et $E \subseteq U \times V$ est l'ensemble des arêtes. On supposera que U et V on même cardinal n ; on notera $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. On rappelle qu'un couplage parfait de G est un sous-ensemble C de E tel que tout sommet de G est l'extrémité d'une arête de C et d'une seule.

   Soit A la matrice $n \times n$ définie de la manière suivante :
   - si $(u_i, v_j) \notin E$ alors $A_{ij} = 0$.
   - si $(u_i, v_j) \in E$ alors A_{ij} est égal à une variable x_{ij} (toutes ces variables sont distinctes).

Soit Q le déterminant de A : Q est donc un polynôme en les variables x_{ij}. Montrez que G admet un couplage parfait si et seulement si Q n'est pas identiquement nul.

4. Déduire de ce qui précède un algorithme probabiliste de complexité polynomiale pour décider de l'existence d'un couplage parfait dans un graphe biparti. Analyser cet algorithme (et en particulier la probabilité d'erreur). On pourra admettre que le calcul du déterminant d'une matrice à coefficients entiers se fait en temps polynomial.

5. Quel est l'avantage de votre algorithme par rapport à une méthode déterministe "naïve" consistant à décider directement si le polynôme Q est identiquement nul ?