Probabilités et applications

L3 - informatique fondamentale
Durée de l'examen : 3 heures
Seules les notes de cours et de TD sont autorisées.

2 juin 2006

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. Il va de soi que les justifications sont particulièrement importantes quand la réponse à une question est contenue dans l'énoncé !

1 Variables aléatoires exponentielles

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires exponentielles indépendantes, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Soit $U = \min(X_1, X_2)$. Déterminez la loi de U puis son espérance.
2. Soit $V = \max(X_1, X_2)$. Déterminez la loi de V puis son espérance.
3. Dans cette question on demande de calculer l'espérance de V par une méthode différente de celle de la question 2, c'est-à-dire sans déterminer complètement sa loi. Pour cela, on considérera la variable aléatoire $U + V$, et on utilisera le résultat de la question 1.

2 Chaînes de Markov

On a vu en cours un algorithme probabiliste pour le problème 2SAT. Adaptez cet algorithme à 3SAT, et adaptez l'analyse de l'algorithme qui a été vue en cours.

3 Méthode probabiliste

Soit X un ensemble fini et $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_N\}$ une famille de N parties non vides de X. Dans cet exercice on s'intéresse aux parties F de X qui ont une intersection de cardinal pair avec "à peu près" la moitié des F_i.

On considère une partie $F \subseteq X$ aléatoire, construite de la manière suivant : pour chaque $x \in X$, on décide de mettre (ou non) x dans F avec probabilité $1/2$, et ces décisions sont prises de manière indépendante. Soit Y_i la variable aléatoire :

$$Y_i = 1 \text{ si } |F \cap F_i| \text{ est pair, et } Y_i = -1 \text{ sinon.}$$

1. Est-ce que les Y_i sont indépendantes deux à deux ?
2. Est-ce que les Y_i sont indépendantes trois à trois ?
3. Soit $Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i$. Calculez $E[Y^2]$.

4. Montrez qu'il existe $F \subseteq X$ tel que :

$$-\frac{\sqrt{N}}{2} \leq |\{F_i \in \mathcal{F} : |F \cap F_i| \text{ est pair}\}| - \frac{N}{2} \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

5. Proposez un algorithme probabiliste pour construire une partie F de X telle que

$$-\sqrt{N} \leq |\{F_i \in \mathcal{F} : |F \cap F_i| \text{ est pair}\}| - \frac{N}{2} \leq \sqrt{N}.$$

   L'algorithme devra avoir une probabilité de succès bornée inférieurement par une constante absolue qu'on précisera.

4 Dérandomisation

Soit $\Omega = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un ensemble fini, et soit $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ une suite de n parties de Ω (on notera en particulier qu'une même partie peut apparaître plusieurs fois dans $\mathcal{A}$). Etant donné un coloriage $\chi : \Omega \to \{-1, 1\}$ et $A \subseteq \Omega$ on pose $\chi(A) = \sum_{a \in A} \chi(a)$, et $\operatorname{disc}(\chi) = \max_j |\chi(A_j)|$.

On a vu en cours un argument probabiliste qui garantit l'existence de coloriages de faible discrépance, et on a vu une dérandomisation de ce résultat basé sur la méthode des probabilités conditionnelles. Le but de cet exercice est de donner une dérandomisation en raisonnant en terme d'espérance conditionnelle plutôt que de probabilités conditionnelles.

1. On se donne pour chaque entier $j \in \{1, \ldots, n\}$ deux entiers relatifs m_j et M_j tels que $m_j \leq M_j$. Soit X_j la variable aléatoire qui a un coloriage χ associe la valeur : $X_j(\chi) = 0$ si $\chi(A_j) \in [m_j, M_j]$, et $X_j(\chi) = 1$ sinon. Soit $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$.
   Calculez l'espérance de X. On donnera le résultat sous la forme d'une somme faisant intervenir des coefficients binomiaux.
2. En déduire une condition qui garantit l'existence d'un coloriage χ satisfaisant simultanément les n conditions : $\chi(A_j) \in [m_j, M_j]$.
3. On cherche un α tel qu'il existe nécessairement un coloriage vérifiant $\operatorname{disc}(\chi) \leq \alpha$. Déduire des questions précédentes une valeur de α qui convient (on exprimera α en fonction de m et n). Comparez cette valeur à celle qui a été obtenue en cours.
4. Supposons que la condition de la question 2 est satisfaite. Expliquez comment choisir une couleur $\epsilon_1 \in \{-1, 1\}$ pour a_1 telle qu'il existe un coloriage χ satisfaisant les n conditions $\chi(A_j) \in [m_j, M_j]$, ainsi que la condition $\chi(a_1) = \epsilon_1$. On raisonnera en terme d'espérance conditionnelle.
5. Déduire de ce qui précède un algorithme polynomial et déterministe qui construit un coloriage χ tel que $\operatorname{disc}(\chi) \leq \alpha$, où α est la valeur trouvée à la question 3. Comparez votre algorithme à celui du cours. Quel avantage y at-il à raisonner en terme d'espérance conditionnelle ?
6. Pourquoi dans cet énoncé a t-on autorisé une même partie à apparaître plusieurs fois dans $\mathcal{A}$? Proposez une variante de l'algorithme qui fonctionne avec des ensembles de parties plutôt qu'avec des suites.