Partiel de *probabilités et applications à l'algorithmique*
Natacha Portier, le 4 avril 2006

Notes de cours et de TD autorisées
Rédaction soignée indispensable !

Exercice 1
On a volé la Joconde. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ce soit celle que Léonard a peinte. On consulte alors deux experts en peinture de la renaissance. Le premier, qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième, qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique. Donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 2
Considérons des variables aléatoires $Z_1 = (X_1, Y_1)$, ..., $Z_n = (X_n, Y_n)$ à valeurs dans $\mathbf{N^2}$ et indépendantes, c'est-à-dire que pour tous sous-ensembles $C_1, \ldots, C_n$ de $\mathbf{N^2}$, on a $Pr[Z_1 \in C_1, \ldots, Z_n \in C_n] = \prod_{i=1}^{n} Pr[Z_i \in C_i]$. Montrer que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

Exercice 3
Montrer que pour toutes variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbf{N}$ et tout sous-ensemble A de $\mathbf{N}$ on a

$$Pr(X \in A) - Pr(Y \in A) \leq Pr(X \neq Y)$$

Exercice 4 : lois binomiales et loi de Poisson
Soit m un réel strictement positif. Soit V une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre m. Pour tout entier strictement positif n soit W_n une variable aléatoire suivant une loi de Binomiale $B(n, m/n)$. Nous allons montrer que (W_n) converge fortement vers V, ce qui signifie ici une convergence dans $l_1(\mathbf{N})$ et revient montrer la convergence vers 0 de

$$\|V - W_n\| = \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{m}{n}\right)^{k} - e^{-m}\frac{m^k}{k!} \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-m}\frac{m^k}{k!}$$

Question 4,01
Montrer que la suite (W_n) converge en loi (simplement) vers V.

Posons pour simplifier $p = m/n \in]0,1[$ et considérons des variables aléatoires $Z_1 = (X_1, Y_1)$, ..., $Z_1 = (X_n, Y_n)$ à valeurs dans $\mathbf{N^2}$ indépendantes et de même loi m_p définie par

$$\begin{aligned}
m_p(0,0) &= e^{-p} - p + pe^{-p} \\
m_p(0,1) &= p - pe^{-p} \\
m_p(1,1) &= pe^{-p} \\
m_p(n,0) &= \frac{p^n}{n!}e^{-p} \quad \text{si } n \geq 2
\end{aligned}$$

Question 4,02
Que vaut $m_p(a,b)$ pour les autres valeurs du couple (a,b) ?

Question 4,03
Quelle est la loi de X_i ? Calculer sa moyenne.

Question 4,04
Quelle est la loi de Y_i ? Calculer sa moyenne.

Question 4,05
Quelle est la loi de $X = X_1 + \cdots + X_n$? Calculer sa moyenne.

Question 4,06
Quelle est la loi de $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$? Calculer sa moyenne.

Question 4,07
Pour i fixé, les variables X_i et Y_i sont-elles indépendantes ?

Question 4,08
Que vaut $Pr(X_i = Y_i)$?

Question 4,09
Montrer que $Pr(X_i = Y_i) \geq 1 - 2p^2$ en utilisant par exemple une minoration affine de e^{-p}.

Question 4,10
En déduire que $Pr(X \neq Y) \leq 2np^2$

Question 4,11
Montrer qu'il existe des sous-ensembles E et E' de $\mathbf{N}$ tels que

$$\|V - W_n\| = (Pr(X \in E') - Pr(Y \in E')) + (Pr(Y \in E) - Pr(X \in E))$$

Question 4,12
Conclure en utilisant l'exercice 3.