Probabilités et applications, TD numéro 2
Natacha Portier et Cédric Tédeschi
mardi 7 février 2006

Question 1,1 : théorème de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Soit $E_1, \ldots, E_n$ une partition finie de l'ensemble des événements Ω et soit $A \in \mathcal{A}$ tels que : $P(A) > 0$, $\forall i E_i \in \mathcal{A}$ et $P(E_i) > 0$. Montrer que pour tout i :

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i)P(A/E_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_k)P(A/E_k)}$$

Question 1,2

Un étudiant répond à une question où il y a à choisir entre m réponses dont une seule est la bonne. Soit p la probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il connaisse la réponse sachant qu'il a répondu correctement ?

Question 2

On fait une suite d'expériences identiques, indépendantes entre elles et à m issues possibles ($m \geq 1$) de probabilités respectives $p_1, \cdots, p_m$ ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). On appelle X le nombre d'essais nécessaires pour que chacun des m résultats soit obtenu au moins une fois.

Question 2,1

Montrer que pour tout entier n la probabilité $P(X > n)$ est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{m}(1-p_i)^n - \sum_{1 \leq i < j \leq m}(1-p_i-p_j)^n + \cdots$$
$$+ (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{m-1} \leq m}(1-p_{i_1}-\cdots-p_{i_{m-1}})^n + (-1)^{m+1} 1_{n=0}$$

Question 2,2

En déduire $E(X)$ en utilisant $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$.

Question 2,3

Montrer que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} = C_m^1 - \frac{1}{2}C_m^2 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m-1}C_m^{m-1} + (-1)^{m+1}\frac{1}{m}C_m^m$$

Question 2,4 Dans le cas où les p_i sont tous égaux calculer l'espérance en utilisant l'égalité précédente.

Question 2,5 : combien de temps faut-il pour remplir un album panini sans faire d'échanges ?
On suppose toujours que tous les p_i sont égaux. On appelle C_i le résultat de la $i^{ème}$ expérience. On dit que C_i est un succès si ce résultat n'avait pas encore été obtenu auparavant. En particulier C_1 et C_X sont toujours des succès.

On divise la suite des C_i en époques : la $i^{ème}$ époque commence avec l'expérience qui suit le $i^{ème}$ succès et finit avec le $(i+1)^{ème}$ succès. On note X_i le nombre d'expérience de la $i^{ème}$ époque. On a :

$$X = \sum_{i=0}^{m-1} X_i$$

Donner la loi de X_i. En déduire son espérance puis celle de X.

Question 3 : rendez-vous
Anne et Emmanuelle se donnent rendez-vous entre midi et 13 heures à la fontaine de l'ENS. Elles conviennent que la première arrivée attendra l'autre au plus 15 minutes. Décrivez l'ensemble des possibles de cette expérience. Déterminez la probabilité qu'Anne et Emmannuelle se rencontrent.

Question 4 : bon appétit
En Belgique on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football est composée de 7 Flamands et de 4 Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité pour qu'il soit flamand.

Question 5 : pub
Tom répartit les pages de publicité pour l'IEEE dans *Computer*. Pour ne pas indisposer les lecteurs, il ne peut pas placer deux pages de publicité à la suite. Sachant qu'il doit placer k pages de publicité différentes dans une revue qui en compte n, calculer le nombre de manières de disposer la publicité.
On suppose que l'ordre des pages non publicitaires entre elles est fixé et que celui des pages publicitaires n'a aucune contrainte.

Question 6 : révisons nos classiques
Dans la classe d'Aline, il y a 23 élèves. Jérôme lui dit qu'il y a plus d'une chance sur deux que deux personnes soit nées le même jour. Il dit même que si la classe comptait 60 élèves, il y aurait plus de 99% de chance que cela arrive. Incrédule, Aline cherche la probabilité d'un tel évènement pour une classe de n élèves, faites-en autant.