Questions existentielles
La méthode probabiliste

Exercice 1 Comptage

On note K_n le graphe complet à n sommets. Une ***clique*** est un sous-graphe complet. Soit C le nombre de cliques à k sommets, on les numérote de 1 à C.

▷ 1. On colorie chaque arête de K_n indépendemment, avec probabilité 1/2 pour chacune des deux couleurs. Quelle est la probabilité de l'événement A_i « la i^e^ clique est monochromatique. » ?

▷ 2. On suppose dans le reste de l'exercice que $\frac{C_n^k}{2^{C_k^2 - 1}} < 1$ et $k \geqslant 3$. Montrer qu'alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{C} A_i\right) < 1$.

▷ 3. En déduire qu'il existe un 2-coloriage de K_n tel qu'il n'y ait pas de clique monochromatique de taille k.

Exercice 2 Espérance

Une ***coupe*** d'un graphe est une partition des sommets en deux ensembles A et B. Le ***poids*** d'une coupe est le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans A et l'autre dans B.

▷ 1. *(lemme)* Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire d'espérance μ. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \mu) > 0$ et $\mathbb{P}(X \leqslant \mu) > 0$.

▷ 2. On affecte indépendemment chaque sommet à A ou B avec probabilité $\frac{1}{2}$. Soit C le poids de la coupe obtenue. Calculer $\mathbb{E}(C)$.

▷ 3. En déduire qu'il existe une coupe de poids au moins $\frac{m}{2}$ où m est le nombre d'arêtes.

Exercice 3 Dérandomisation par espérance conditionnelle

On garde les notations de l'exercice précédent. Soit p la probabilité d'obtenir une coupe de poids au moins $\frac{m}{2}$ par le tirage précédent.

▷ 1. Montrer que $\frac{1}{p} = O(m)$ (i.e. minorer p).

▷ 2. En déduire un algorithme pour trouver une telle coupe dont l'espérance du temps de calcul est $O(m^2)$.

▷ 3. On cherche maintenant un algorithme déterministe. On note les sommets $s_1, \ldots, s_n$. Soit X_i l'ensemble auquel est affecté s_i (X_i est donc une variable aléatoire qui vaut A ou B). Montrer que $\mathbb{E}(C \mid X_1) = \mathbb{E}(C)$.

▷ 4. Supposons $X_1, \ldots, X_k$ fixés. Montrer que l'on peut choisir $x \in \{A, B\}$ de façon à ce que
$$\mathbb{E}(C \mid X_1, \ldots, X_k, X_{k+1} = x) \geqslant \mathbb{E}(C \mid X_1, \ldots, X_k).$$

▷ 5. En déduire un algorithme déterministe qui fixe les valeurs de $X_1, \ldots, X_n$, tel que $\mathbb{E}(C \mid X_1, \ldots, X_n) \geqslant \mathbb{E}(C)$.

▷ 6. Exprimer $\mathbb{E}(C \mid X_1, \ldots, X_k, X_{k+1} = A) - \mathbb{E}(C \mid X_1, \ldots, X_k, X_{k+1} = B)$ en fonction des voisins de v_{k+1} et donner une description simple l'algorithme précédent.

Exercice 4 Sample and modify

Soit G un graphe à n sommets et m arêtes, et $d := 2m/n$ le degré moyen de G. Un ***stable*** est un sous-ensemble des sommets ne contenant pas deux sommets voisins. On considère l'algorithme probabiliste suivant pour trouver un stable :

- Supprimer chaque sommet (et ses arêtes adjacentes) indépendemment avec probabilité $1 - \frac{1}{d}$.
- Supprimer chaque arête restante et supprimer l'une de ses extrémités.

▷ 1. Montrer que l'on obtient bien un stable.

▷ 2. Calculer l'espérance du nombre X de sommets à la fin de la première étape.

▷ 3. Calculer l'espérance du nombre Y d'arêtes à la fin de la première étape.

▷ 4. En déduire qu'il existe un stable de taille au moins $\frac{n^2}{4m}$.
Remarque. Touver un stable de taille maximale est NP-complet.