Marches aléatoires, chaînes de Markov

Exercice 1 Bruit qui court

Les notes de cours seront-elles autorisées à l'examen ? La réponse est transmise à travers n intermédiaires. On suppose que chaque étudiant transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme en son contraire avec probabilité $1 - p$. Les intermédiaires sont indépendants.

▷ 1. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov a deux états et calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale.

▷ 2. Que se passe-t-il quand $n \to \infty$?

Exercice 2 Un jeu de tennis

On considère un jeu classique du tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivier. C'est à Olivier de servir. Il gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité pour Olivier de gagner le jeu.

Exercice 3 D'un état à l'autre

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathcal{S}$ de matrice de transition P. Pour tout état y, on note $T_y := \min\{n \mid X_n = y\}$ (avec la convention $\min\varnothing = +\infty$). Pour tout événement A on note $\mathbb{P}_x(A) := \mathbb{P}(A \mid X_0 = x)$.

Soient x et y deux états distincts, on pose $\rho_{xy} := \mathbb{P}_x(T_y < +\infty)$.

Les questions de cet exercices sont simples, le but est de manier les définitions en faisant une démonstration particulièrement détaillée.

▷ 1. Montrer que $\rho_{xy} > 0 \iff \exists n \geqslant 1, P^n(x, y) > 0$.

▷ 2. On suppose désormais $\rho_{xy} > 0$. Soit $n_0 := \min\{n \geqslant 1 \mid P^n(x, y) > 0\}$.
Soient $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$ des états tels que $P(x, x_1)P(x_1, x_2)...P(x_{n_0-1}, y) > 0$.
Montrer que les états $x =: x_0, x_1, \ldots, x_{n_0-1}, x_{n_0} := y$ sont distincts.

▷ 3. Supposons $\mathcal{S}$ fini de cardinal d. Montrer que $n_0 \leqslant d - 1$. On suppose $\rho_{xy} > 0$, montrer que $\mathbb{P}_x(T_y \leqslant d - 1) > 0$

Exercice 4 Walk the (real) line

Soit $\{X_k\}$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées. On définit une marche aléatoire par $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. On s'intéresse à une marche aléatoire dans $\mathbb{R}$. La fonction de distribution des X_k est alors :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On s'intéresse à la probabilité d'un retour à l'origine (en un temps fini).

▷ 1. S'il y a eu un retour à l'origine au temps m, que peut-on dire de m ? Montrer qu'un retour à l'origine au temps $2m$ arrive avec une probabilité $u_{2m} = C_{2m}^m 2^{-2m}$.

▷ 2. On définit de même la probabilité f_{2m} qu'un premier retour à l'origine se fasse au temps $2m$. Montrer que les probabilités $\{f_{2k}\}$ et $\{u_{2k}\}$ vérifient la relation $u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0$ (on pose $u_0 := 1$ et $f_0 := 0$).

▷ 3. On définit les fonctions génératrices :

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} x^m \quad \text{et} \quad F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m} x^m$$

Déduire de la question précédente une relation simple entre $U(x)$ et $F(x)$.

▷ 4. On admet que $U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. En déduire que $F(x) = 1 - (1 - x)^{1/2}$.

▷ 5. Montrer que $f_{2m} = \frac{C_{2m}^m}{(2m-1)2^{2m}}$. Indication : considérer F'.

▷ 6. Définissons w_n la probabilité qu'un retour à l'origine se fasse au plus tard au temps n. Notre but est de savoir si l'on va revenir en un temps fini, c'est-à-dire déterminer $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$. Montrer que $w_* = F(1)$. Conclure.

Correction : voir le poly ACM page 471.