Urnes avec renforcement

Voici un problème formalisé avec des urnes, mais il est utile par exemple pour résoudre une marche aléatoire dans une grille finie carrée, ou pour modéliser une situation économique où deux marques sont en concurrence, et où les acheteurs ont plus tendance à choisir la marque dominante.

Exercice 1 L'urne de Polya

On considère une urne avec initialement une boule blanche et une boule noire. On répète alors l'opération suivante : tirer une boule, la remettre, ajouter une boule de la même couleur. On s'intéresse au nombre de boules blanches et noires après n tirages, et au comportement asymptotique.

▷ 1. Décrire avec les mains le comportement qui semble intuitif.

▷ 2. Modéliser par une chaîne de Markov et faire un dessin.

▷ 3. Combien y a-t-il de chemins menant à la configuration « n boules dont k noires » ?

▷ 4. Quelle est la probabilité de chaque chemin ?

▷ 5. Conclure.

Exercice 2 Généralisation

▷ 1. *(Changement de modèle)* Décrire un modèle équivalent avec deux urnes et seulement des boules blanches. On notera x et y le nombre de boules dans chacune des deux urnes.

▷ 2. *(Encore un changement de modèle)* On considère deux urnes et des boules blanches. Montrer que, quand on fixe le nombre total de boules ajoutées, le nombre de boules dans l'urne 1 a la même loi dans les deux modèles suivants :

1. Temps t continu, les deux urnes vides au départ évoluent indépendemment. Chaque urne reçoit une boule à $t = 0$. Chaque fois que l'urne 1 reçoit une boule, on attend un temps T_x puis on lui ajoute une boule. T_x est une variable aléatoire de loi exponentielle avec paramètre x^p (x est toujours le nombre de boules de l'urne 1). On fait de même pour l'urne 2 avec une v.a. U_y.
2. Temps discret. À chaque étape on ajoute une boule à l'une des deux urnes. La probabilité que ce soit l'urne 1 est $\frac{x^p}{x^p+y^p}$.

▷ 3. Faire le lien avec la question 1 de cet exercice.

▷ 4. On se place désormais dans le cas $p > 1$. Soit $S_1 := \sum_{x=0}^{\infty} T_x$. Montrer que presque sûrement $S_1 < \infty$.

▷ 5. Donner une interprétation en français de S_1.

▷ 6. On définit S_2 de façon analogue pour l'urne 2. Montrer que presque sûrement $S_1 \neq S_2$.

▷ 7. Supposons $S_1 < S_2$, donner une relation (avec quantificateurs sur n et m) entre $\sum_{x=1}^{m} T_x$ et $\sum_{y=1}^{n} U_y$.

▷ 8. Faire une conclusion intéressante.