Espérances

1 Un problème pratique

Un grand nombre N de gens doivent se soumettre à un test sanguin. Cette opération peut se gérer de deux façons.

1. Chaque échantillon est testé séparément, auquel cas N tests sont nécessaires.
2. Les échantillons sont testés par paquets de k et mélangés. Si le test est négatif, ce test suffit. Si le test est positif, chacun des k échantillons doivent être retestés séparéments, ce qui donne un nombre final de $k+1$ tests.

Soit p la probabilité qu'un échantillon soit positif, pour tout le monde, et indépendamment les uns des autres.

Exercise 1 *Quelle est la probabilité qu'un mélange de k échantillons soit positif ?*

Exercise 2 *Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X du nombre de tests nécessaires en utilisant la deuxièmle façon. (On supposera N divisible par k ?*

Exercise 3 *Pour p petit, quelle est la valeur de k qui minimise le nombre de tests ?*

2 Un problème discret

Soit $t_1, t_2, \dots, t_r$ le résultat d'une sélection de r élémets pris dans l'ensemble $(1/n, 2/n, \dots, n/n)$. Soit X la variable aléatoire qui donne le plus petit r satisfaisant :

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_r > 1$$

On souhaite montrer que $\mathbb{E}(X) = (1 + 1/n)^n$. Pour cela, on peut utiliser une variante équivalente de l'expérience qui consiste à choisir avec remise un ensemble d'éléments $t_1, t_2, \dots, t_r$ dans l'ensemble $(1, 2, \dots, n)$. Alors X est la variable aléatoire du plus petit r qui satisfait :

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_r > n$$

Exercise 4 *Montrer que $\mathbb{P}(X \geq j+1) = \binom{n}{j}(\frac{1}{n})^j$*

Exercise 5 *Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X \geq j+1)$.*

Exercise 6 *En déduire une expression de $\mathbb{E}(X)$ et sa limite quand $n \to \infty$.*

3 Un problème théorique (et pratique aussi finalement)

Soit une collection de variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, \dots, X_n$ ayant des espérances finies.

Exercise 7 *Montrer que, pour toute variable aléatoire Y :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid Y = y\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i \mid Y = y)$$

On lance 2 dés. Soit X la variable aléatoire de la somme des deux lancés. Soit X_1 la variable aléatoire du résultat du premier lancer.

Exercise 8 *Calculer $\mathbb{E}(X \mid X_1)$ en fonction de X_1.*

Plus généralement, $\mathbb{E}(X \mid X_1)$ est une variable aléatoire fonction de X_1. Montrer numériquement que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid X_1)) = \mathbb{E}(X)$.

Exercise 9 *Plus généralement, démontrer le théorème suivant :*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y))$$

Considérons maintenant un programme dont la procédure principale inclut un appel à la procédure $\mathcal{S}$. Chaque appel à $\mathcal{S}$ lancent récursivement des copies de $\mathcal{S}$, où le nombre de copies est une loi aléatoire binomiale de paramètres n et p. Ces variables aléatoires sont indépendantes. On cherche l'espérance du nombre de copies de $\mathcal{S}$.

Raisonnons en terme de *génération*. Le lancement initial de $\mathcal{S}$ est dans la génération 0. Sinon, un processus de génération i a été lancé par un processus de génération $i-1$. Notons Y_i le nombre de copies de $\mathcal{S}$ de génération i. On voit facilement que $\mathbb{E}(Y_0) = 1$ et $\mathbb{E}(Y_1) = np$.

Exercise 10 *Supposons que l'on connaisse la valeur de Y_{i-1}. Comment peut-on calculer l'espérance de Y_i ?*

Exercise 11 *Donner l'espérance du nombre total de copies au bout de i générations.*

4 Un problème de boules

Vous avez une urne contenant deux boules noires et deux boules blanches, et 80 dollars. Chance ! Vous allez pouvoir jouer à un super jeu. Sortez les boules une par une sans remise. A chaque fois, pariez la moitié de votre fortune que c'est une blanche qui apparait.

Exercise 12 *Quelle est la fortune finale que vous pouvez espérer ?*