Pas de malchance

1 Un peu de géométrie

▷ **Question 1** *Une feuille de TD contient 4 coquilles. À chaque relecture, une coquille non corrigée est corrigée avec probabilité 1/3. Les relectures sont indépendantes les unes des autres. Combien de relectures faut-il faire pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune coquille soit supérieure à 0,9 ?*

2 Moi d'abord

▷ **Question 2** *Alan et Beth lancent une pièce à tour de rôle, le premier qui fait face a gagné. Quelle est la probabilité qu'Alan gagne ?*

▷ **Question 3** *Peut-on truquer la pièce pour rendre le jeu équitable ?*

▷ **Question 4** *Cette fois ils lancent deux dés. Alan gagne s'il obtient 7, Beth gagne si elle obtient 6. Elle s'est déjà fait avoir une fois et exige de commencer. Est-ce un jeu équitable ?*

▷ **Question 5** *L'une de ces parties risque t-elle de se prolonger indéfiniment ?*

3 Estimateurs

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, de même espérance m et de même variance $\sigma^2 > 0$.

▷ **Question 6** *On pose* $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n X_i$. *Calculer l'espérance et la variance de* $\overline{X_n}$. *Pourquoi appelle-t-on* $\overline{X_n}$ *la moyenne empirique ?*

▷ **Question 7** *On pose* $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$. *Calculer l'espérance de* S_n^2. *Quel est l'intérêt de cette variable ?*

▷ **Question 8** *Quelle est la différence avec la variance emprique* $V_n := \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ *?*

▷ **Question 9** *Exprimer* S_n^2 *et* V_n *à l'aide de* $\sum_{i=1}^n X_i$, $\sum_{i=1}^n X_i^2$ *et* n. *Quel est l'intérêt ?*

On suppose de plus que pour tout i, X_i est une variable aléatoire uniformément distribuée dans $[0; \theta]$.

▷ **Question 10** *Estimer* θ *à l'aide de* $\overline{X_n}$.

▷ **Question 11** *On pose* $M := \max X_1, ..., X_n$. *Estimer* θ *à l'aide de* M. *Indice : quelle est l'espérance de* M *?*

▷ **Question 12** *Calculer la variance de ce nouvel estimateur.*

4 Loi de succession de Laplace

▷ **Question 14** *On dispose de* $n + 1$ *urnes numérotées de 0 à* n. *L'urne numéro* k *contient* k *boules rouges et* $n - k$ *boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro on en tire* m *fois une boule avec remise après chaque tirage. Calculer la probabilité que le* $(m + 1)^{\text{ème}}$ *tirage donne encore une boule rouge sachant qu'au cours des* m *premiers tirages seules des boules rouges ont été tirées. Calculer la limite de cette probabilité quand* $n \to +\infty$.