Révisions, lois continues

Exercice 1 Probabilités conditionnelles

Quand on téléphone chez Charlie, il est de notoriété publique qu'on a 9 chances sur 10 de tomber sur son répondeur. Quand il n'est pas là, il le branche toujours. Pour des raisons obscures, quand il est là, il le laisse prendre la communication deux fois sur trois.

▷ 1. Quelle est la probabilité qu'il soit là quand on appelle ?

▷ 2. Mince ! on vient de tomber sur son répondeur. Quelle est la probabilité qu'il ait été là ?

Solution Soient les événements

- R « On tombe sur le répondeur »
- L « Charlie est là »

▷ 1.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(R) & = & \mathbb{P}(R \mid L)\,\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}\left(R \mid \overline{L}\right)\mathbb{P}\left(\overline{L}\right) \\ \frac{9}{10} & = & \frac{2}{3}\mathbb{P}(L) + 1\,(1 - \mathbb{P}(L)) \\ \mathbb{P}(L) & = & \dfrac{\frac{9}{10} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \dfrac{-\frac{1}{10}}{-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{10} \end{array}$$

▷ 2. $\mathbb{P}(L \mid R) = \dfrac{\mathbb{P}(L \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \dfrac{\mathbb{P}(R)\,L \cdot \mathbb{P}(L)}{\mathbb{P}(R)} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{2}{9}$

Lois continues

Exercice 2

Soit U une v.a. de lui uniforme sur $[0; 2]$. Soit $X := \sqrt{U}$.

▷ 1. Calculer la fonction de répartition F_X de X.

▷ 2. Calculer la densité f_X de X.

▷ 3. Même questions pour $Y := 1/U$.

▷ 4. Quelle est l'espérance de Y ?

Solution

▷ 1.

$$\begin{array}{rcl} F_X(z) & = & \mathbb{P}(X \leqslant z) = \mathbb{P}\left(\sqrt{U} \leqslant z\right) = \mathbb{P}\left(U \leqslant z^2\right) = F_U\left(z^2\right) \\ & = & \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{si } z \in [0, \sqrt{2}] \\ 1 & \text{si } z \geqslant \sqrt{2} \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \end{array}$$

▷ 2. $f_X(x) = F'_X(x) = x$ sur $[0; \sqrt{2}]$.

▷ 3. $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{U} \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(U \geqslant \frac{1}{y}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(U \leqslant \frac{1}{y}\right)$

$F_Y = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2y} & \text{si } y \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

$f_y(y) = \frac{1}{2y^2}$ sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

▷ 4. $E(Y) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{2y} dy = +\infty$

Exercice 3

La loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$, est la loi continue de densité

$$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\beta} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

▷ 1. Faire une remarque sur $\Gamma(1, \beta)$.

▷ 2. Montrer que pour toutes v.a. réelles X et Y indépendantes de densités respectives f_X et f_Y la densité f_Z de $Z := X + Y$ est $f_z(z) = \int_t f_X(t) f_Y(z-t)\,\mathrm{d}t$. Indication :

$$\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}(X + Y \leqslant z)) = \int_x \int_y \mathbb{1}(x + y \leqslant z)\, f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

▷ 3. Soit X et Y deux v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. Quelle est la densité de $Z := X + Y$?

Solution

▷ 1. $\Gamma(1)$ a pour densité, à une constante multiplicative près, $\mathrm{e}^{-x/\beta}$. La constante est imposé par le fait que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. C'est donc une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\beta}$.

▷ 2.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leqslant z) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}(X + Y \leqslant z)) \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}(x + y \leqslant z)\, f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{z} f_X(x) f_Y(u-x)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{u=-\infty}^{z} \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(u-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathbb{P}(Z \leqslant z) &= \int f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

▷ 3. La densité de Z est donc, à une constante multiplicative près,

$$\begin{aligned} f_z(z) &\propto \int_t \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\lambda(z-t)}\mathbb{1}(t \geqslant 0 \text{ et } z-t \geqslant 0)\,\mathrm{d}t \\ &\propto \int_{t=0}^{z} \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}t = z\mathrm{e}^{-\lambda z} \end{aligned}$$

On reconnaît une loi $\Gamma(2, \frac{1}{\lambda})$.
Remarque. Plus généralement, si $X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ alors $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

Exercice 4

Quand on met une rallonge à la table de la salle à manger, la nappe est trop courte de 10cm pour couvrir toute la longueur. On la dispose alors en laissant deux bandes de table non couverte à chaque extrémité. La position de la nappe par rapport aux extrémités de la table est laissée au hasard. La variable aléatoire X égale à la largeur de l'espace découvert d'une extrémité suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 10]$. On note Y la largeur découverte la plus grande et Z la plus petite.

▷ 1. Déterminer la loi de probabilité de Y.

▷ 2. En déduire la loi de Z.

Solution

▷ 1. Soit $y \in [5; 10]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}(Y \leqslant y \cap X \geqslant 5) + \mathbb{P}(Y \leqslant y \cap X \leqslant 5) \\ &= \mathbb{P}(5 \leqslant X \leqslant y) + \mathbb{P}(X \leqslant 5 \cap 10 - X \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(5 \leqslant X \leqslant y) + \mathbb{P}(10 - y \leqslant X \leqslant 5) \\ &= \tfrac{y-5}{10} + \tfrac{5-(10-y)}{10} \\ &= \tfrac{y-5}{5} \end{aligned}$$

Donc Y suit une loi uniforme sur $[5; 10]$.

▷ 2. $\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(10 - Y \leqslant z) = 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant 10 - z) = 1 - \begin{cases} 0 & \text{si } z \geqslant 5 \\ \frac{10-z-5}{5} & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 5 \\ 1 & \text{si } z \leqslant 0 \end{cases}$

$\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \frac{z}{5}$ sur $[0; 5]$, 1 si $z \geqslant 5$ et 0 si $z \leqslant 0$. C'est donc une loi uniforme sur $[0; 5]$.