Introduction au lambda-calcul
la confluence

Pierre Lescanne

14 mars 2007 – 14 : 06

Qu'est-ce que la confluence ?

Lemme de substitution

La réduction parrallèle

La démonstration de la confluence

Propriété du losange

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad {\color{blue}\Longrightarrow \exists P} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] N_1 \arrow[dr, "R"] & & N_2 \arrow[dl, "R"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Confluence

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, two heads, "R"'] \arrow[dr, two heads, "R"] & \\
N_1 & & N_2
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \exists P \quad
\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[dr, two heads, "R"] & & N_2 \arrow[dl, two heads, "R"'] \\
 & P &
\end{tikzcd}
$$

Remarques

1. $\xrightarrow[R]{}$ est confluente si $\xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\!\rightarrow$ a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\ {} \arrow[dr, dotted, two heads] & & {} \arrow[dl, dotted, two heads] \\ & {} & \end{tikzcd}$$

où $\overset{\cdots}{\twoheadrightarrow}$ est un flèche existentielle.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser) :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } R \text{ est confluente alors} \\ M \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} N \iff \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).\end{array}}$$

Si R est confluente alors
$M \overset{*}{\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}} N \iff \exists P(M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P)$.

Démonstration : $\Longleftarrow$ est évident car $\underset{R}{\twoheadrightarrow} \subseteq \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ et $\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ est symétrique et transitive.

Si R est confluente alors
$M \overset{*}{\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow}} N \Longleftrightarrow \exists P(M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P)$.

Démonstration : $\Longrightarrow$. Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow} N$. Soit

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$

$$\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

- si $n = 0$ alors $M \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ ou $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.

Si R est confluente alors
$M \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} N \iff \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P)$.

Démonstration : $\Longrightarrow$.

- si $n \neq 0$, par confluence, dans $M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ il existe M'_n tel que $N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ et
$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$
$$\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$
a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

Confluence et convertibilité

Corollaire : Si R est confluente

1. Si N est une forme normale de M alors $M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\!\!\!\to N$.
2. Un terme a au plus une forme normale.

Confluence de $\rightarrow_\beta$

Théorème :

$\boxed{\xrightarrow[\beta]{} \text{ est confluent}}$

Remarques préliminaires

- Si $\xrightarrow[R]{}$ a la propriété du losange, alors $\overset{*}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}}$ a la propriété du losange.
- $\xrightarrow[\beta]{}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?
- Il faut donc trouver une relation $\;\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;\;$ telle que
  - o $\;\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;\;$ a la propriété du losange,
  - o $\;\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;\; = \underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$,
    - + donc $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ a la propriété du losange,
    - + ce qui signifie que $\xrightarrow[\beta]{}$ est confluente.

Lemme de substitution

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } x \notin FV(L) \text{ alors} \\ M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]\end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } x \notin FV(L) \text{ alors} \\ M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]\end{array}}$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.

M est une variable

- $M \equiv x$, les deux côtés valent $N[y := L]$,
- $M \equiv y$, les deux côtés valent L,
- $M \equiv z$, les deux côtés valent z,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } x \notin FV(L) \text{ alors} \\ M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]\end{array}}$$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.
M est une abstraction $M \equiv \lambda z.M_1$.

$$\begin{array}{lcll}
M[x := N][y := L] & \equiv & (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] & \\
 & \equiv & \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) & \text{(par définition)} \\
 & \equiv & \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) & \text{(par induction)} \\
 & \equiv & (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] & \text{(par définition)}
\end{array}$$

M est une application facile.

Définition de la réduction parallèle

(réflexivité) $\quad M \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel \; M$

(APP-congruence) $$\frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\; M' \qquad N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\; N'}{MN \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\; M'N'}$$

(ABS-congruence) $$\frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\; M'}{\lambda x.M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\; \lambda x.M'}$$

(β-parallèle) $$\frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\; M' \qquad N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\; N'}{(\lambda x.M)N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\; M'[x := N']}$$

Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow[\beta]{} M'$ alors $M \mathrel{-\!\!\Vert\!\!\rightarrow} M'$

   c'est-à-dire $\xrightarrow[\beta]{} \subseteq \mathrel{-\!\!\Vert\!\!\rightarrow}$

2. Si $M \mathrel{-\!\!\Vert\!\!\rightarrow} M'$ alors $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} M'$

   c'est-à-dire $\mathrel{-\!\!\Vert\!\!\rightarrow} \subseteq \underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$

3. Si $M \mathrel{-\!\!\Vert\!\!\rightarrow} M'$ et $N \mathrel{-\!\!\Vert\!\!\rightarrow} N'$ alors

   $M[x := N] \mathrel{-\!\!\Vert\!\!\rightarrow} M'[x := N']$

En exercice.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte (due à M. Takahashi)
que la propriété du losange pour $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\|\;\;\;$:

$$M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\|\;\;\; N \Longrightarrow N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\|\;\;\; M^* \qquad (*)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte
que la propriété du losange pour $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\parallel$:

$$M \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\parallel N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\parallel M^* \qquad (*)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.
Intuitivement M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

Le définition de M^*

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$ si $M_1 M_2$ n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

Exercices

Calculer

1. $((\lambda x.x)\ ((\lambda yzu.y\ (z\ u))\ abc))^*$
2. $((\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y\ y))^*$

$$\boxed{M \mathrel{-\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow} N \Longrightarrow N \mathrel{-\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow} M^*.}$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice.

$$\boxed{M \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; M^*.}$$

Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; N$, alors deux cas pour N,

- $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- $N \equiv N_1[x := N_2]$

dans les deux cas, il y a des N_i (i=1 ou i=2) tels que $M_i \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; N_i$.

Par induction, $N_i \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; M_i^*$.
Pour chaque cas :

- Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.
- Si $N \equiv N_1[x := N_2]$,alors nous avons $N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$, par le résultat 3.

Résumons

De la propriété (*) pour $\overset{\|}{\longrightarrow}$

on déduit la propriété du losange pour $\overset{\|}{\longrightarrow}$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\overset{\|}{\twoheadrightarrow}$
de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$

parce que $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} = \overset{\|}{\twoheadrightarrow}$,

qui est la confluence de $\xrightarrow[\beta]{}$.

Donc $\xrightarrow[\beta]{}$ est confluent.

C.q.f.d.