Licence d'Informatique fondamentale

Corrigé de l'examen de programmation 2

2006-2007

Exercice 2 *(Sémantique axiomatique)*

1. L'invariant de la boucle est :

$$\forall k, (bas < k \leq i \Rightarrow a[k] < a[bas]) \wedge (i < k \leq haut \Rightarrow a[bas] \leq a[k]).$$

2. **Pre1 :** $bas < haut$

```
i := bas
j := bas
```

Post1 : $bas < haut \wedge i = bas \ \wedge \ j = bas$

Pre2 : $bas < haut \wedge j \leq haut \ \wedge \ \forall k, \ bas < k \leq i \Rightarrow a[k] < a[bas] \quad \wedge \quad i < k \leq j \Rightarrow a[bas] \leq a[k]$

```
while (j < haut) do
    j := j + 1
```

Pre3 : $j \leq haut \ \wedge \ \forall k, \ bas < k \leq i \Rightarrow a[k] < a[bas] \quad \wedge \quad i < k < j \Rightarrow a[bas] \leq a[k]$

```
if a[j] < a[bas] then
          i := i + 1
          x := a[i]
          a[i] := a[j]
          a[j] := x
```

Post3 : $j \leq haut \ \wedge \ \forall k, \ bas < k \leq i \Rightarrow a[k] < a[bas] \quad \wedge \quad i < k \leq j \Rightarrow a[bas] \leq a[k]$

Post2 : $\neg(j < haut) \wedge j \leq haut \wedge bas < haut \ \wedge \ \forall k, \ bas < k \leq i \Rightarrow a[k] < a[bas]$
$\wedge \ i < k \leq j \Rightarrow a[bas] \leq a[k]$

Post : $\forall k, \ bas < k \leq i \Rightarrow a[k] < a[bas] \quad \wedge \quad i < k \leq haut \Rightarrow a[bas] \leq a[k]$

3. On doit, en particulier, montrer que :
   - **Post1** $\Rightarrow$ **Pre2**.
   - **Post2** $\Rightarrow$ **Post**.

Exercice 1 *(Unification)*

$$\begin{array}{rcll}
\{f(f(x,x),y) \stackrel{?}{=} f(f(x,y),x)\} & \mapsto\!\!\!\Rightarrow & \{f(x,x) \stackrel{?}{=} f(x,y), \quad y \stackrel{?}{=} x\} & \textit{(Décompose)} \\
 & \mapsto\!\!\!\Rightarrow & \{x \stackrel{?}{=} x, \quad x \stackrel{?}{=} y, \quad y \stackrel{?}{=} x\} & \textit{(Décompose)} \\
 & \mapsto\!\!\!\Rightarrow & \{x \stackrel{?}{=} y, \quad y \stackrel{?}{=} x\} & \textit{(Supprime)} \\
 & \mapsto\!\!\!\Rightarrow & \{x \stackrel{?}{=} y, \quad x \stackrel{?}{=} x\} & \textit{(Élimine)} \\
 & \mapsto\!\!\!\Rightarrow & \{x \stackrel{?}{=} y\} & \textit{(Supprime)}
\end{array}$$

La solution est donc la substitution $\{x \mapsto y\}$.

$$\begin{array}{rcll}
\{f(f(x,x),y) \stackrel{?}{=} f(y,f(x,y))\} & \mapsto\!\!\!\Rightarrow & \{f(x,x) \stackrel{?}{=} y, \quad y \stackrel{?}{=} f(x,y)\} & \textit{(Décompose)} \\
 & \mapsto\!\!\!\Rightarrow & \textbf{ECHEC !!} \text{ car } y \in Var(f(x,y)). &
\end{array}$$

Il n'y a pas de solution.

Exercice 3 *(Déduction naturelle)*

1. **a**

$$\dfrac{\dfrac{\neg p \vee q \vdash \neg p \vee q \qquad \dfrac{\dfrac{\neg p \vee q, p, \neg p \vdash \neg p \qquad \neg p \vee q, p, \neg p \vdash p}{\neg p \vee q, p, \neg p \vdash \bot}}{\neg p \vee q, p, \neg p \vdash q} \qquad \neg p \vee q, p, q \vdash q}{\neg p \vee q, p \vdash q}}{\neg p \vee q \vdash p \Rightarrow q}$$

b Posons $\Gamma \equiv p \Rightarrow q, \neg(\neg p \vee q)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, q \vdash \neg(\neg p \vee q) \qquad \dfrac{\Gamma, q \vdash q}{\Gamma, q \vdash \neg p \vee q}}{\Gamma, q \vdash \bot}}{\Gamma \vdash \neg q} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg p \vdash \neg(\neg p \vee q) \qquad \dfrac{\Gamma, \neg p \vdash \neg p}{\Gamma, \neg p \vdash \neg p \vee q}}{\Gamma, \neg p \vdash \bot}}{\Gamma \vdash p}}{\Gamma \vdash q}}{\Gamma \vdash \bot}}{p \Rightarrow q \vdash \neg p \vee q}$$

2. $\neg p \vee q \vdash p \Rightarrow q$ peut être démontré en logique intuitionniste et $p \Rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ ne peut pas être démontrée en logique intuitionniste, car sinon on pourrait démontrer $p \Rightarrow p \vdash \neg p \vee p$, soit $\vdash \neg p \vee p$, puisque $p \Rightarrow p$ est un théorème de logique intuitionniste.

Exercice 4 *(Paires critiques)*

Calculer les paires critiques du système de réécriture :

$$\begin{array}{rcl}
x * (y * z) & \rightarrow & (x * y) * z \\
x * x & \rightarrow & x
\end{array}$$

Première superposition $(y * z) * (y * z)$ qui donne la paire critique :

$$\langle\ ((y * z) * y) * z, \quad y * z\ \rangle$$

Deuxième superposition $x * (y * y)$ qui donne la paire critique :

$$\langle\ (x * y) * y, \quad x * y\ \rangle$$

Exercice 5 *(Logique combinatoire)*

$$\begin{array}{rcl}
[x].(S\ x\ y) & = & S([x](Sx))([x]y) \\
 & = & S(S([x].S)([x].x))([x]y) \\
 & = & S(S(KS)([x].x))([x]y) \\
 & = & S(S(KS)I)([x]y) \\
 & = & S(S(KS)I)(Ky) \\
 & & \\
 & & \text{ou} \\
 & = & S(S(KS)(SKK))(Ky)
\end{array}$$

Exercice 6 (Terminaison)

On sait que la terminaison du problème de Syracuse est un problème ouvert, il suffit que coder ce problème par un système de réécriture.

$$\begin{array}{rcl}
f(s(s(x)), y, s(z)) & \rightarrow & f(x, y, z) \\
f(0, x, y) & \rightarrow & f(y, y, y) \\
f(s(0), x, y) & \rightarrow & f(s(trois(x)), s(trois(x)), s(trois(x))) \\
trois(s(x)) & \rightarrow & s(s(s(trois(x)))) \\
trois(0) & \rightarrow & 0
\end{array}$$