

Programmation 1 – TP n° 11

Système F

On rappelle la syntaxe de Système F à la Church :

$$M ::= x \mid (M M) \mid \lambda x^T.M \mid \Lambda X.M \mid (M T) \qquad T ::= o \mid T \rightarrow T \mid X \mid \forall X.T$$

la sémantique :

$$\frac{}{(\lambda x^\sigma.M) N \rightarrow M[N/x]} \qquad \frac{}{(\Lambda X.M) T \rightarrow M[T/X]} \qquad (\xi) \quad (\mu_l) \quad (\mu_r)$$

et les règles de typage :

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash T : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^\sigma.T : \sigma \rightarrow \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash T : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash U : \sigma}{\Gamma \vdash T U : \tau}$$

$$\frac{\Gamma; X \vdash T : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda X.T : \forall X.\sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash T : \forall X.\sigma}{\Gamma \vdash T \tau : \sigma[\tau/X]}$$

1 Manipulation

Q 1.1 Donner un type (où une écriture à la Church) et une dérivation de typage de ces termes écrits à la Curry :

$$\lambda x.x \qquad \lambda x.(x x) \qquad \lambda x.\lambda y.x (y x) \qquad \lambda f.((f \mathbf{I}) (f y))$$

$$\text{double} = \Lambda X.\lambda f.\lambda x.f(fx)$$

quadruple

Q 1.2 Donner des habitants des types suivants :

$$\forall X_1.\forall X_2.(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1) \qquad (\forall X_1.X_1 \rightarrow X_3) \rightarrow (\forall X_2.X_2) \rightarrow X_3$$

$$\forall X.X$$

Q 1.3 Décrire l'ensemble des habitants du type $\forall X.X \rightarrow X$.

2 Chourch toujours

Q 2.1 Etendre la définition des entiers de Chourch avec la puissance du polymorphisme.

Q 2.2 Coder power.

3 Produits et Sommes

On définit le produit de type par :

$$\tau \times \sigma = \forall X. (\tau \rightarrow \sigma \rightarrow X) \rightarrow X$$

Q 3.1 Donner les termes encodant le constructeur de paire et les projections.

Q 3.2 Calculer $\pi_i < M, N >$.

Q 3.3 Vérifier que $< \pi_1 t, \pi_2 t > \rightarrow^* t$ est faux. Que manque t-il ?

On définit le type somme par :

$$\tau + \sigma = \forall X. (\tau \rightarrow X) \rightarrow (\sigma \rightarrow X) \rightarrow X$$

Q 3.4 Donner les termes encodant les constructeurs **injl** et **case**.

Q 3.5 Calculer **case(injl t)**.

4 Listes

On veut définir un constructeur de type **List** tel que si τ est un type, **List** τ est le type dont les objets sont les listes d'éléments de type τ .

Q 4.1 Définir **List**.

Q 4.2 Définir **Nil** et **Cons**.

Q 4.3 Ecrire un terme correspondant à $[1; 2; 3]$.

Q 4.4 Donner **It** tel que **It** $w f$ **Nil** $\rightarrow^* w$ et **It** $w f$ (**Cons** $u t$) $\rightarrow fu(\mathbf{It} w f t)$

Q 4.5 Donner les opérateurs de récursion de concaténation et le miroir.

Q 4.6 Donner le type et les constructeurs des arbres binaires.