Programmation 1 – TP n° 7
Stratégies

On rappelle la syntaxe et les règles de réduction du λ-calcoul :

$$M ::= x \mid \lambda x.M \mid MN \qquad \text{où } x \text{ est une variable}$$

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \to M[N/x]}\ \beta \qquad \frac{M \to M'}{MN \to M'N}\ \mu_l \qquad \frac{N \to N'}{MN \to MN'}\ \mu_r \qquad \frac{M \to M'}{\lambda x.M \to \lambda x.M'}\ \xi$$

1 Stratégies

Une stratégie de réduction pour le λ-calcoul est une relation $\to_s \subseteq \to$ qui est déterministe.

Q 1.1 Que signifie "$\to_s$ est déterministe" ?

1.1 Call-by-value

On définit le λ-calcoul en appel par valeur en définissant (x est une variable) :

- les termes : $M ::= x \mid \lambda x.M \mid MN$
- les valeurs : $V ::= x \mid \lambda x.M$
- la sémantique opérationnelle à petits pas :

$$\frac{}{(\lambda x.M)V \to_v M[V/x]}\ \beta \qquad \frac{M \to_v M'}{MN \to_v M'N}\ \mu_l \qquad \frac{N \to_v N'}{VN \to_v VN'}\ \mu_r$$

Q 1.2 Réduisez les termes $\omega(I\omega I)$ et $I(F\Omega I)$ avec la relation $\to_v$.

Q 1.3 Prouvez que $\to_v$ est déterministe.

Q 1.4 Cette présentation est appelée “left-to-right”, quelle est la présentation “right-to-left” ?

1.2 Call-by-name

La sémantique du λ-calcoul en appel par nom est :

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \to_n M[N/x]}\ \beta \qquad \frac{M \to_n M'}{MN \to_n M'N}\ \mu_l$$

Q 1.5 Répondez aux questions 1.2 et 1.3 pour l’appel par nom.

2 Transformation CPS

La programmation par continuation (*Continuation Passing Style*) est un paradigme permettant de rendre explicite le flot de calcoul dans les programmes, ce qui permet des transformations utiles par exemple pour la compilation, ou pour encoder un mécanisme d'exceptions.

Comme dans les TPs précédents, les termes écrits en CPS attendent un futur (une continuation k) qui représente la suite du calcoul.

On (re)définit le λ-calcul avec la grammaire suivante :

$$\begin{array}{lrcl} \text{Valeurs} & U, V & ::= & x \mid \lambda x.M \\ \text{Termes} & M, N & ::= & V \mid MN \end{array}$$

On définit alors deux traductions (mutuellement récursives) du λ-calcul dans lui-même par :

$$\begin{array}{rclrcl} [x] & = & x & [\![V]\!] & = & \lambda k.k[V] \\ [\lambda x.M] & = & \lambda x.[\![M]\!] & [\![MN]\!] & = & \lambda k.[\![M]\!](\lambda\alpha.[\![N]\!](\lambda\beta.\alpha\beta k)) \end{array}$$

Q 2.1 Ecrire $[\![\omega I]\!]$ et le réduire en lui donnant la continuation initiale I.

Q 2.2 Montrez que, si V est une valeur, $[\![M\{V/x\}]\!] = [\![M]\!]\{[V]/x\}$.

La fonction $|M|_k$ décrit les étapes de *réductions administratives* lors de l'application de la traduction de M à une continuation k :

$$\begin{array}{rclrcl} |V|_k & = & k[V] & |VN|_k & = & |N|_{\lambda\beta.[M]\beta k} \\ |UV|_k & = & [U][V]k & |MN|_k & = & |M|_{\lambda\alpha.[\![N]\!](\lambda\beta.\alpha\beta k)} \end{array}$$

Q 2.3 Prouvez que, pour tout λ-terme K, $[\![M]\!]K \rightarrow_v^+ |M|_K$.

Q 2.4 Le résultat précédent est-il vrai pour $\rightarrow_n$?

Q 2.5 Démontrez que, si $M \rightarrow_v N$, alors pour tout K, $|M|_k \rightarrow_v^+ |N|_k$. Et pour $\rightarrow_n$?

Q 2.6 Prouvez l'*indifférence* de la transformation : $[\![M]\!]I \rightarrow_v^* V \iff [\![M]\!]I \rightarrow_n^* V$.

Q 2.7 Démontrez le théorème de *simulation* : si $M \rightarrow_v^* V$, alors $[\![M]\!]I \rightarrow^* [V]$.

3 Stratégies Perpétouelles

On appelle *stratégie perpétouelle* une stratégie $\rightarrow_s$ telle que tout terme ayant une réduction infinie dans le λ-calcoul se réduit infiniment dans $\rightarrow_s$.

Q 3.1 La stratégie call-by-name est-elle perpétouelle ? Pourquoi ?

3.1 Call-by-value "fort"

On définit l'appel par valeur "fort" comme un appel par valeur qui réduit sous les λ. En notant R les termes sous forme normale, on définit donc $\rightarrow_{vf}$ inductivement par :

$$\frac{}{(\lambda x.R_1)R_2 \rightarrow_{vf} R_1[R_2/x]}\ \beta \qquad \frac{M \rightarrow_{vf} M'}{MN \rightarrow_{vf} M'N}\ \mu_l \qquad \frac{N \rightarrow_{vf} N'}{RN \rightarrow_{vf} RN'}\ \mu_r \qquad \frac{M \rightarrow_{vf} M'}{\lambda x.M \rightarrow_{vf} \lambda x.M'}\ \xi$$

Q 3.2 Donner la grammaire qui permet de construire les formes normales R.

Q 3.3 $\rightarrow_{vf}$ est-elle perpétouelle ? Pourquoi ?

3.2 La réduction p

On définit inductivement la relation $\rightarrow_p$:

$$\frac{x \in FV(M)}{(\lambda x.M)N \rightarrow_p M[N/x]}\ I\beta \qquad \frac{x \notin FV(M) \quad N \text{ normal}}{(\lambda x.M)N \rightarrow_p M}\ K\beta \qquad \frac{x \notin FV(M) \quad N \rightarrow_p N'}{(\lambda x.M)N \rightarrow_p (\lambda x.M)N'}\ \text{arg}$$

$$\frac{M \rightarrow_p M' \quad M \notin \mathcal{A}bstr}{MN \rightarrow_p M'N}\ \text{app1} \qquad \frac{N \rightarrow_p N' \quad M \text{ normal} \quad M \notin \mathcal{A}bstr}{MN \rightarrow_p MN'}\ \text{app2}$$

$$\frac{M \rightarrow_p M'}{\lambda x.M \rightarrow_p \lambda x.M'}\ \lambda$$

où $\mathcal{A}bstr$ est l'ensemble des λ-abstractions (termes de la forme $\lambda x.M$).

Q 3.4 Montrer que $\rightarrow_p$ préserve la réductibilité : si M n'est pas normal dans le λ-calcoul, alors il existe M' tel que $M \rightarrow_p M'$.

Q 3.5 Montrer que $\rightarrow_p$ est déterministe.

Q 3.6 Montrer le lemme suivant :

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda x.M)N \text{ a une réduction infinie} \\ x \in FV(M)\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M[N/x] \text{ a une réduction infinie}$$

Q 3.7 En déduire que $\rightarrow_p$ est une stratégie perpétouelle.

3.3 Normalisation forte

On dit qu'un terme est *fortement normalisable* lorsqu'il n'a pas de réduction infinie.

Q 3.8 Donner une caractérisation des termes fortement normalisables.