Programmation 1 – TP n° 9
Lambda-calcoul simplement typé

On rappelle les règles de typage *à la Curry* de ST :

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x \,:\, \sigma} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M \,:\, \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M \,:\, \sigma \to \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \,:\, \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N \,:\, \sigma}{\Gamma \vdash M\, N \,:\, \tau}$$

1 Dérivations de typage

1.1 Echauffement

On (re)définit les termes suivants :

$$\mathbf{I} = \lambda x.x \qquad \mathbf{K} = \lambda x.\lambda y.x \qquad \mathbf{S} = \lambda x.\lambda y.\lambda z.(xz)\ (yz)$$

Q 1.1 Typer **I**, **K** et **S**. Puis typer (**I I**).

Q 1.2 Typer **SKK**.

Q 1.3 Vérifier que **SKK** se réduit en **I**. Que fait la β-réduction aux dérivations de typage ?

Q 1.4 Trouver un habitant **B** du type $(\tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho$

Q 1.5 Typer le terme $\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda t.x\ (y\ t)\ t\ (z\ t)$

Q 1.6 Prouver que $\omega = \lambda x.x\ x$ et $\lambda a.\lambda b.(a\ b)\ (b\ a)$ ne sont pas typables.

1.2 Types pas habités

Soit E un type sans habitant.

Q 1.7 Dire lesquels des types suivants sont habités par des termes clos :

$$\sigma \to E \qquad E \to E \qquad \sigma \to ((\sigma \to E) \to E) \qquad ((\sigma \to E) \to E) \to \sigma$$

$$(\sigma \to E) \to \sigma \to E \qquad ((\sigma \to \tau) \to \sigma) \to \sigma$$

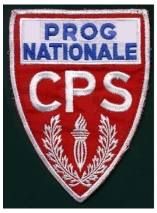
1.3 Entiers de Chourch

Une des définition des entiers de Chourch est $[\![n]\!] = \lambda x.\lambda f.f^n\ x$

Q 1.8 Donner le type des entiers de Chourch.

Q 1.9 Pour chacune des opérations suivantes, donner une dérivation de typage ou une preuve de non-typabilité : successeur, addition, multiplication et puissance.

2 Transformations CPS



On rappelle la transformation CPS-CBV-LTR vue au TD 7 :

$$\begin{array}{rclcrcl} [x] &=& x & & [\![V]\!] &=& \lambda k.k[V] \\ [\lambda x.M] &=& \lambda x.[\![M]\!] & & [\![MN]\!] &=& \lambda k.[\![M]\!](\lambda\alpha.[\![N]\!](\lambda\beta.\alpha\beta k)) \end{array}$$

Q 2.1 Trouver la traduction sur les types permettant de prouver :

Théorème. Si $\Gamma \vdash T : \theta$ alors $[\![\Gamma]\!] \vdash [\![M]\!] : [\![\theta]\!]$.

(Par $[\![\Gamma]\!]$ on entend $\{(x : [\![\tau]\!])$ tels que $(x : \tau) \in \Gamma\}$)

Q 2.2 Que peut-on en déduire sur le comportement de la traduction CPS vis-à-vis de la terminaison ?

3 Une autre preuve de terminaison est possible

On propose ici une autre preuve de terminaison du λ-calcoul simplement typé.

Théorème (Forte normalisation). Si M est simplement typable alors M termine.

(terminer c'est ne pas avoir de réduction infinie pour le λ-calcoul fort.)

On suppose prouvées la réduction du sujet et la stabilité par substitution. Le but de l'exercice est de prouver les 2 lemmes suivants, le théorème se déduisant assez facilement ensuite.

Lemme 1. Si $A, B, C_1, \ldots, C_n$ sont tous SN, et si $A\ B\ C_1\ \ldots\ C_n$ n'est pas SN, alors :

1. $A \to^* \lambda x.D$
2. $D[B/x]\ C_1\ \ldots\ C_n$ n'est pas SN

Lemme 2. Si M et P sont typables et si M et P sont SN, alors $M[P/x]$ est SN.

Q 3.1 Prouver le lemme 1. en considèrant les dérivations infinies partant de $A\ B\ C_1\ \ldots\ C_n$.

On prouve le lemme 2. par induction sur le triplet $(typ(P), h(M), s(M))$ où :
- $typ(P)$ est le type de P.
- $h(M)$ est la hauteur de la plus longue réduction depuis M.
- $s(M)$ est la taille de M.

Q 3.2 Expliquer pourquoi l'induction est bien-fondée.

On discute ensuite sur la forme de M.

Q 3.3 Prouver le lemme 2. dans les cas :

1. $M = \lambda y.N$
2. $M = y\ R_1\ \ldots\ R_n$

Q 3.4 Utiliser le premier lemme pour le cas $M = (\lambda y.L)\ Q\ R_1\ \ldots\ R_n$.

Q 3.5 Utiliser le premier lemme pour le cas (difficile) où $M = x\ L\ Q_1\ \ldots\ Q_n$

Q 3.6 En déduire le résultat. Quand a t-on utilisé le fait que M et P était simplement typés ?