Optimisation

- Souvent, un problème est modélisé par des contraintes, où on ne veut pas seulement une solution mais la “meilleure”.
- C’est un problème d’optimisation.
- On a besoin d’une fonction objective (une fonction des solutions vers les réels) pour classer les solutions.
- Un problème d’optimisation (C, f) est une contrainte C et une fonction objective f
- Une affectation θ_1 est meilleure qu’une affectation θ_2, si $f(\theta_1) < f(\theta_2)$.
- Une solution optimale est une solution de C telle qu’il n’y a pas de meilleure solution de C.

Exemples

- $C \equiv X + Y \geq 4$, $f \equiv X^2 + Y^2$
- Solution optimale $\{X \leftarrow 2, Y \leftarrow 2\}$
- Il y a des problèmes d’optimisation qui n’ont pas de solution
  - la contrainte n’a pas de solution: $(X \geq 2 \ \wedge \ X \leq 0, X^2)$
  - le problème n’a pas d’optimum: $(X \leq 0, X)$
- Pour les inéquations linéaires on peut utiliser l’algorithme de Fourier pour optimiser. C’est très cher.

L’algorithme simplex

- L’algorithme d’optimisation le plus couramment utilisé
- optimise une fonction linéaire par rapport à des contraintes linéaires
- lié à l’élimination Gauss-Jordan
- Un problème d’optimisation (C, f) est en forme simplex, si
  - C est une conjonction de C_e et C_i
  - C_e est une conjonction d’équations linéaires
  - C_i exprime le fait que toutes les variables de C sont non-négatives
  - f est une expression linéaire sur des variables de C

Mettre en forme simplex

Un problème peut être mis en forme simplex en

- remplaçant des variables X par $X^+ - X^-$
- remplaçant des inéquations $e \leq r$ par $e + s = r$ où s est une nouvelle variable

Exemple d’un problème simplex:

Minimiser $3X + 2Y - Z + 1$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll}
X & +Y & & & = & 3 \wedge \\
-X & -3Y & +2Z & +T & = & 1 \wedge \\
X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 & &
\end{array}$$

Forme résolue simplex

Un problème d'optimisation simplex est en forme résolue de base, si

- Toutes les équations sont en forme résolue
- Chaque constante à droite est non-négative
- Seulement des variables paramètres apparaissent dans la fonction objective

On obtient une solution de base en instanciant chaque paramètre avec 0 et chaque non-paramètre avec la constante dans son équation

Exemple

Un problème équivalent à celui avant en forme résolue de base:

Minimiser $10 - Y - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll} X & = & 3 & -Y & & \wedge \\ T & = & 4 & +2Y & -2Z & \wedge \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 & & \end{array}$$

On obtient une solution de base et sa valeur objective: $\{X \leftarrow 3, T \leftarrow 4, Y \leftarrow 0, Z \leftarrow 0\}$ et $f = 10$

Algorithme simplex

On commence par un problème en forme résolue de base

- Répéter
  - Choisir une variable y avec un coefficient négatif dans la fonction objective
  - Trouver l'équation $x = b + cy + \ldots$ où $c < 0$ et $-b/c$ est minimal (si il y en a au moins une avec $c < 0$)
  - Réécrire cette équation vers $y = -b/c + (1/c)x + \ldots$ (pivoter)
  - Substituer $-b/c + (1/c)x + \ldots$ pour y dans toutes les autres équations et dans la fonction objective
- jusqu'à ce qu'il n'existe pas une telle variable y ou une telle équation
- Si un tel y n'existe pas une solution optimale est trouvée
- sinon il n'y pas de solution optimale

Exemple

Minimiser $10 - Y - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll} X & = & 3 & -Y & & \wedge \\ T & = & 4 & +2Y & -2Z & \wedge \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 & & \end{array}$$

On choisit Y et la première équation :

Minimiser $7 + X - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll} Y & = & 3 & -X & & \wedge \\ T & = & 10 & -2X & -2Z & \wedge \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 & & \end{array}$$

Exemple

Minimiser $7 + X - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll} Y & = & 3 & -X & & \wedge \\ T & = & 10 & -2X & -2Z & \wedge \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 & & \end{array}$$

On choisit Z et la deuxième équation :

Minimiser $2 + 2X + 0.5T$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll} Y & = & 3 & -X & & \wedge \\ Z & = & 5 & -X & -0.5T \wedge & \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 & & \end{array}$$

On ne peut plus choisir de variable, valeur optimale: 2

Comment obtenir une solution de base ?

- Résoudre un problème simplex différent :
  - Ajouter des variables artificiellement pour obtenir des équations en forme résolue de base
  - Minimiser la somme des variables artificielles
  - Si la somme est 0 on peut construire une forme résolue de base pour le problème initiale

Exemple

Minimiser $3X + 2Y - Z + 1$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll} X & +Y & & & = & 3 \wedge \\ -X & -3Y & +2Z & +T & = & 1 \wedge \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 & & \end{array}$$

On ajoute deux variables artificielles et on obtient:

Minimiser $A_1 + A_2$ par rapport à

$$\begin{array}{llllllll} A_1 & = & 3 & -X & -Y & & & \wedge \\ A_2 & = & 1 & +X & +3Y & -2Z & -T & \wedge \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 \wedge & A_1 \geq 0 \wedge & A_2 \geq 0 & & \end{array}$$

On réécrit la fonction objective en substituant les variables artificielles : $4 + 2Y - 2Z - T$

Exemple

Minimiser $4 + 2Y - 2Z - T$ par rapport à

$$\begin{array}{llllllll} A_1 & = & 3 & -X & -Y & & & \wedge \\ A_2 & = & 1 & +X & +3Y & -2Z & -T & \wedge \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 \wedge & A_1 \geq 0 \wedge & A_2 \geq 0 & & \end{array}$$

On choisit T et la deuxième équation :

Minimiser $3 - X - Y + A_2$ par rapport à

$$\begin{array}{llllllll} A_1 & = & 3 & -X & -Y & & & \wedge \\ T & = & 1 & +X & +3Y & -2Z & -A_2 & \wedge \\ X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 \wedge & A_1 \geq 0 \wedge & A_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Exemple

Minimiser $3 - X - Y + A_2$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll l}
A_1 & = & 3 & -X & -Y & & & \wedge \\
T & = & 1 & +X & +3Y & -2Z & -A_2 & \wedge \\
X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 \wedge & A_1 \geq 0 \wedge & A_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

On choisit X et la première équation :
Minimiser $A_1 + A_2$ par rapport à

$$\begin{array}{llllll l}
X & = & 3 & -Y & -A_1 & & & \wedge \\
T & = & 4 & +2Y & -2Z & -A_1 & -A_2 & \wedge \\
X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 \wedge & A_1 \geq 0 \wedge & A_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

On substitue 0 pour A_1 et A_2 et dans la fonction objective originale les non-paramètres:

Minimiser $10 - Y - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{lllll l}
X & = & 3 & -Y & & \wedge \\
T & = & 4 & +2Y & -2Z & \wedge \\
X \geq 0 \wedge & Y \geq 0 \wedge & Z \geq 0 \wedge & T \geq 0 & &
\end{array}$$

Comment obtenir une solution de base ?

En général, il y a trois cas:

- La valeur optimale de la fonction objective du problème modifié est > 0
  - Le problème original est insatisfaisable.
- La valeur optimale est 0 et toutes les variables artificielles sont des paramètres
  - Après élimination des variables artificielles on obtient une forme résolue de base
- La valeur optimale est 0, mais pas toutes les variables artificielles sont des paramètres
  - Si une des variables de la partie droite est une des variables originales, on peut réécrire l'équation avec cette variable à gauche et ainsi de suite.

Cycles

- Une solution de base est dégénérée, si une variable non-paramètre prend la valeur 0.
- Dans ce cas, il y a un danger d'un cycle.
- Il y a des règles simples pour éviter des cycles, par exemple en ordonnant les variables.

Optimisation sur les entiers

- L'algorithme simplex est défini sur des domaines réels.
- On peut l'utiliser aussi comme ingrédient de base pour des problèmes d'optimisation sur les entiers. Mais on doit résoudre plusieurs problèmes.
- Optimisation branch and bound pour (C, f) où C est une contrainte sur les entiers et f une fonction à minimiser
  - Utiliser simplex pour trouver un optimum réel
  - Si la solution est entière : la retourner
  - Sinon choisir une variable x avec une valeur optimale non entière d et considérer récursivement les problèmes
    - $(C \wedge x \leq \lfloor d \rfloor, f)$
    - $(C \wedge x \geq \lceil d \rceil, f)$
  - On garde en mémoire la meilleure solution entière trouvée jusqu'à présent
  - Si on a déjà trouvé une solution sur les entiers, alors tout problème avec une plus grande meilleure solution sur les réels peut être abandonné