Université Paris 7 - Master 1 Informatique - Programmation avec contraintes

Examen du 11 janvier 2006 - Durée : 2 heures

Informations : Tous les documents reliés sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif et peut être modifié. **Répondez uniquement à l'intérieur des espaces encadrés**.

Considérez la contrainte suivante sur les entiers : $3 * Y = 2 * Z + 1$ avec les domaines $Y \in [2..5]$ et $Z \in [3..8]$.

Question 1 (1 point) Si on rend borne consistante la contrainte on obtient les domaines:
$Y \in \{3 \ldots 5\}$ $Z \in \{4 \ldots 7\}$

Question 2 (2 points) Si on rend arc consistante la constrainte on obtient les domaines:
$Y \in \{3, 5\}$ $Z \in \{4, 7\}$

On considère la contrainte $X = 3 * Y + Z - 1 \ \wedge \ Y = Z + 3 \ \wedge \ Z = 5 + 2 * X$

Question 3 (2 points) Si on applique l'algorithme de Gauss-Jordan à cette contrainte on obtient:
$X = -4$ $Y = 0$ $Z = -3$

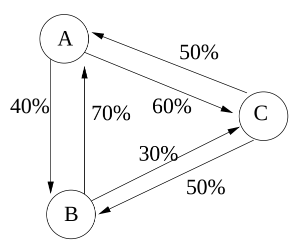
Une machine à café a dans sa réserve $P2$ pièces de 2 Euros, $P1$ pièces de 1 Euro, $P50$ pièces de 50 centimes, $P20$ pièces de 20 centimes et $P10$ pièces de 10 centimes. L'utilisateur insère des pièces de monnaie pour un total de T centimes pour une boisson dont le prix est de P centimes (T et P sont des multiples de 10).

Question 4 (3 points) Écrire en GPROLOG un prédicat `monnaie(T,P,[P2,P1,P50,P20,P10],L)` qui étant donné des valeurs pour `T`, `P`, `P2`, etc. donne dans `L` une liste avec le nombre de pièces rendues par la machine. Cette liste `L` contient d'abord le nombre de pièces de 2 Euros, ensuite le nombre de pièces de 1 Euro, etc. Par exemple `monnaie(200,130,[3,4,5,2,3],L)` donne

```
L = [0,0,0,2,3]
L = [0,0,1,0,2]
L = [0,0,1,1,0]
```

```
monnaie(T,P,[P2,P1,P50,P20,P10],[X2,X1,X50,X20,X10]) :-
   fd_domain(X2,0,P2),
   fd_domain(X1,0,P1),
   fd_domain(X50,0,P50),
   fd_domain(X20,0,P20),
   fd_domain(X10,0,P10),
   X2*200+X1*100+X50*50+X20*20+X10*10 #= T-P,
   fd_labeling([X2,X1,X50,X20,X10]).
```

On suppose qu'il y a trois réservoirs d'eau.



Après chaque unité de temps, **tout** le contenu de chaque réservoir est versé dans les deux autres réservoirs. La proportion du contenu versé dans chacun des deux autres réservoirs est indiqué dans la figure.

Question 5 (3 points) Complétez le programme en YAP Prolog suivant qui permet de calculer la relation entre le contenu initial d'eau dans chaque réservoir et le contenu d'eau dans chaque réservoir après N unités de temps.

```
relation(A,B,C,A,B,C,N) :- {N = 0}.
relation(A,B,C,A1,B1,C1,N) :- {A2 = 0.7*B + 0.5*C,
                               B2 = 0.4*A + 0.5*C,
                               C2 = 0.6*A + 0.3*B, N > 0, N1 = N - 1},
                               relation(A2,B2,C2,A1,B1,C1,N1).
```

Question 6 (1 points) Écrire une requête pour: Combien d'eau il y a dans chaque réservoir après 30 unités de temps, si chaque réservoir contient initialement 10 litres ?

```
relation(10,10,10,A,B,C,30)
```

Considérez la grille partiellement remplie suivante:

16	17		

Question 7 (3 points) Écrire un programme en GPROLOG qui trouve une solution au problème ci-dessus.

```
grille(L) :-
L = [X11,X12,X13,X14,X21,X22,X23,X24,
          X31,X32,X33,X34,X41,X42,X43,X44],
fd_domain(L,3,18),
X21 #= 16, X22 #= 17,
X11+X12+X13+X14#=42,
X21+X22+X23+X24#=42,
X31+X32+X33+X34#=42,
X41+X42+X43+X44#=42,
X11+X21+X31+X41#=42,
X12+X22+X32+X42#=42,
X13+X23+X33+X43#=42,
X14+X24+X34+X44#=42,
X11+X22+X33+X44#=42,
X41+X32+X23+X14#=42,
fd_all_different(L),
fd_labeling(L).
```

Considérez le problème suivant: Minimiser $2 * X - Y + 2$ par rapport à
$Z = 2 + 3 * X - 2 * Y$ et
$U = 1 + 6 * X - 2 * Y$ et
$X \geq 0$ et $Y \geq 0$ et $Z \geq 0$ et $U \geq 0$

Question 8 (1 point) Quel est la requète qu'on doit poser à YAP pour obtenir la valeur du minimum ?

```
{Z = 2+3*X-2*Y,U=1+6*X-2*Y,X >= 0, Y >= 0,Z >= 0, U >=0},inf(2*X-Y+2,A)
```

Question 9 (1 point) Le problème est déjà en forme résolue de base. Quel est l'équation que l'algorithme simplex choisi pour pivoter ?

$U = 1 + 6 * X - 2 * Y$

Question 10 (1 point) Donnez le nouveau problème après un pas de l'algorithme :

Minimiser $\frac{3}{2} - X + \frac{1}{2} * U$
par rapport à
$Z = 1 - 3 * X + U$ et
$Y = \frac{1}{2} + 3 * X - \frac{1}{2} * U$ et
et $X \geq 0$ et $Y \geq 0$ et $Z \geq 0$ et $U \geq 0$

Question 11 (1 point) À la fin de l'algorithme on obtient quelle minimum ? $\frac{7}{6}$ Il est obtenu avec les valeurs des variables suivantes: $X = \frac{1}{3}$ $Y = \frac{3}{2}$ $U = 0$ $Z = 0$

On considère la contrainte $X \leq Y - 2 \ \wedge \ Y \leq T - 3 \ \wedge \ U - 2 \geq Y \ \wedge \ V + 1 \geq U \ \wedge \ U \leq Z$

Question 12 (2 points) En appliquant l'algorithme de Fourier pour éliminer successivement les variables Y, V et U on obtient la contrainte

$$X \leq T - 5 \ \wedge \ X \leq Z - 4$$