http://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Cours n°1

Modélisation markovienne

Mercredi 27 septembre 2005

http ://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Table des matières

1. Chaînes de Markov

Modélisation

Observations d'un système : M_0, M_1, $\ldots M_n$

Modélisation

Observations d'un système : M_0, M_1, ... M_n

– M_n variable aléatoire ;

– M_n peut dépendre, a priori de M_0, ... M_{n-1} (et même des valeurs futures M_{n+1}, ...)

Modélisation

Observations d'un système : M_0, M_1, ... M_n

– M_n variable aléatoire ;

– M_n peut dépendre, a priori de M_0, ... M_{n-1} (et même des valeurs futures M_{n+1}, ...)

– Données statistiques :
Probabilités des différentes trajectoires

$$\mathbb{P}(M_0 = x_0, M_1 = x_1, \dots, M_n = x_n)$$

$n \geq 1$, (x_i) suite de l'espace d'états.

Modélisation (II)

Problème

Représentation mathématique de (M_n)

Modélisation (II)

Problème

Représentation mathématique de (M_n)

- Minimale

  pas les probas de toutes les trajectoires ;

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Modélisation (II)

Problème

Représentation mathématique de (M_n)

- **Minimale**
  pas les probas de toutes les trajectoires ;
- **Effective**
  permet l'analyse mathématique
  du comportement de la suite (M_n).

Modélisation (II)

Problème

Représentation mathématique de (M_n)

– **Minimale**
  pas les probas de toutes les trajectoires ;
– **Effective**
  permet l'analyse mathématique
  du comportement de la suite (M_n).

Solution (possible)
$\Rightarrow$ Modélisation markovienne

Le cadre

Espace d'états : $\mathcal{S}$ fini ou dénombrable.

- $\mathcal{S} = \{1, \ldots, N\}$;
- $\mathcal{S} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^d$;
- $\mathcal{S} = \{1, \ldots, C\}^{(\mathbb{N})}$: suites finies à valeurs dans $\{1, \ldots, C\}$.
- . . .

Matrices de transition (Poly. page 89)

Une matrice de transition

$$P = (p(x,y),\ x,y \in \mathcal{S})$$

est une matrice à termes positifs telle que

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} p(x,y) = 1, \qquad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Matrices de transition (Poly. page 89)

Une matrice de transition

$$P = (p(x,y),\ x,y \in \mathcal{S})$$

est une matrice à termes positifs telle que

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} p(x,y) = 1, \qquad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Notation vectorielle : $P \cdot 1 = 1$.

1 vecteur propre à droite, valeur propre 1.

Propriété de Markov

Si (M_n) est une suite de variables aléatoires. a la propriété de Markov si,

$$\mathbb{P}(M_n{=}x_n \mid M_{n-1}{=}x_{n-1}, M_{n-2}{=}x_{n-2}, \ldots, M_0{=}x_0) \\ = \mathbb{P}(M_n{=}x_n \mid M_{n-1}{=}x_{n-1}).$$

pour tout $n \geq 1$.

Propriété de Markov

Si (M_n) est une suite de variables aléatoires.
a la **propriété de Markov** si,

$$\mathbb{P}(M_n{=}x_n \mid M_{n-1}{=}x_{n-1}, M_{n-2}{=}x_{n-2}, \dots, M_0{=}x_0) \\ = \mathbb{P}(M_n{=}x_n \mid M_{n-1}{=}x_{n-1}).$$

pour tout $n \geq 1$.

Traduction :
Sachant tout le passé, la dernière position suffit pour connaître le comportement ultérieur.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Propriété de Markov (II)

La chaîne de Markov (M_n) est homogène si,

$$\mathbb{P}(M_n = y | M_{n-1} = x) \\ = \mathbb{P}(M_1 = y | M_0 = x) = p(x, y).$$

pour tout $n \geq 1$,

Propriété de Markov (II)

La chaîne de Markov (M_n) est homogène si,

$$\mathbb{P}(M_n = y | M_{n-1} = x) \\ = \mathbb{P}(M_1 = y | M_0 = x) = p(x, y).$$

pour tout $n \geq 1$,

$(p(x, y), x, y \in \mathcal{S})$ est la matrice de transition de la chaîne de Markov.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Propriété de Markov (II)

La chaîne de Markov (M_n) est homogène si,

$$\mathbb{P}(M_n = y | M_{n-1} = x) = \mathbb{P}(M_1 = y | M_0 = x) = p(x, y).$$

pour tout $n \geq 1$,

$(p(x, y), x, y \in \mathcal{S})$ est la matrice de transition de la chaîne de Markov.

Homogénéité : La dynamique de la suite (M_n) est invariante dans le temps.

Exemple 1 : Tirages indépendants

Lancers successifs de pièce de monnaie

$$M_0, M_1, \ldots, M_n \in \{0, 1\}$$

– Biais $q \in [0, 1]$, $\mathbb{P}(M_k = 0) = q$, $\forall k \geq 0$.

– Indépendance $\Rightarrow \mathbb{P}(M_n{=}0 | M_{n-1}, \ldots, M_0){=}q$

Exemple 1 : Tirages indépendants

Lancers successifs de pièce de monnaie

$$M_0, M_1, \ldots, M_n \in \{0,1\}$$

- Biais $q \in [0,1]$, $\mathbb{P}(M_k = 0) = q$, $\forall k \geq 0$.
- Indépendance $\Rightarrow \mathbb{P}(M_n{=}0 | M_{n-1}, \ldots, M_0){=}q$
- Matrice de transition

$$\begin{aligned} p(0,0) = P(M_1 = 0 | M_0 = 0) &= q \\ = P(M_1 = 0 | M_0 = 1) &= p(1,0), \end{aligned}$$

$$p(0,1) = p(1,1) = 1 - q$$

Dépendance markovienne triviale

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Exemple 2 : Chaîne alternée

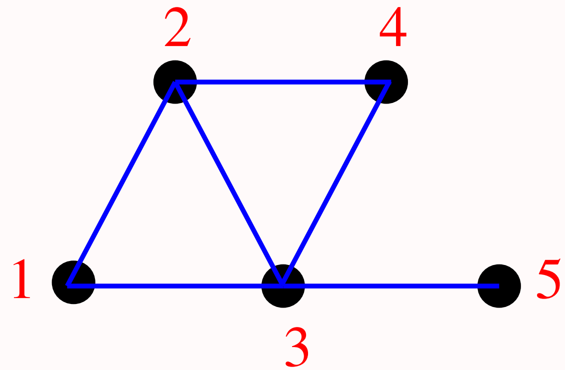
Observations à valeurs dans $\mathcal{S} = \{0, 1\}$.

$$0 \longrightarrow 1 \text{ avec proba } a_0$$
$$1 \longrightarrow 0 \text{ avec proba } a_1$$

Matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} p(0,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_0 & a_0 \\ a_1 & 1 - a_1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : Marches aléatoires sur un graphe



$\mathcal{G} = \{1, 2, \ldots N\}$. Si x, $y \in \mathcal{G}$ et $x \sim y$,

$$p(x, y) = P(M_1 = y \mid M_0 = x) = \frac{1}{d_x}$$

d_x degré de x.

Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$

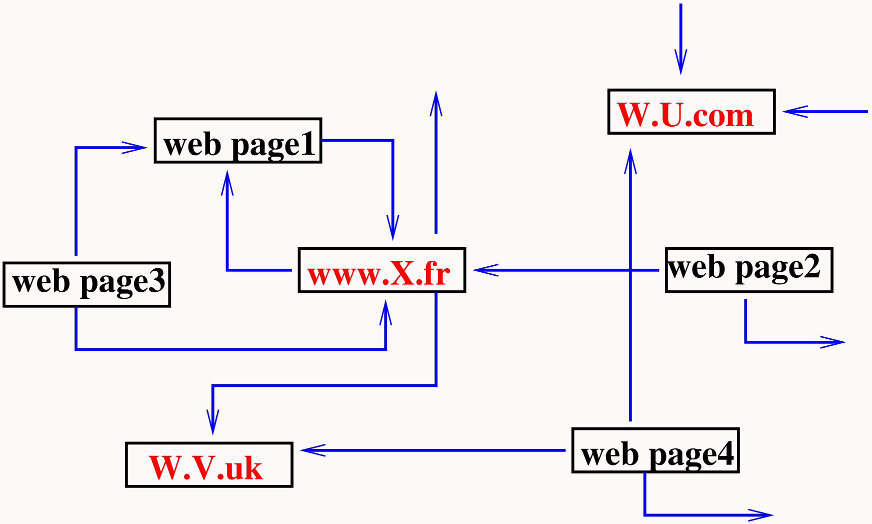
Matrice de transition :

$$p(x, x + e_i) = p(x, x - e_i) = \frac{1}{2d}$$

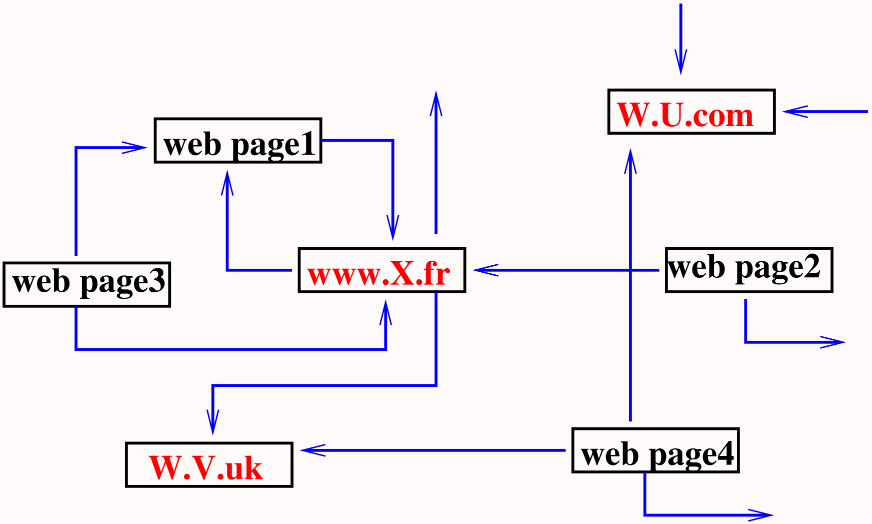
$e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)$, i-ième vecteur unité

$1 \leq i \leq d$.

Marche aléatoire assymétrique
Indice de popularité d'une page web

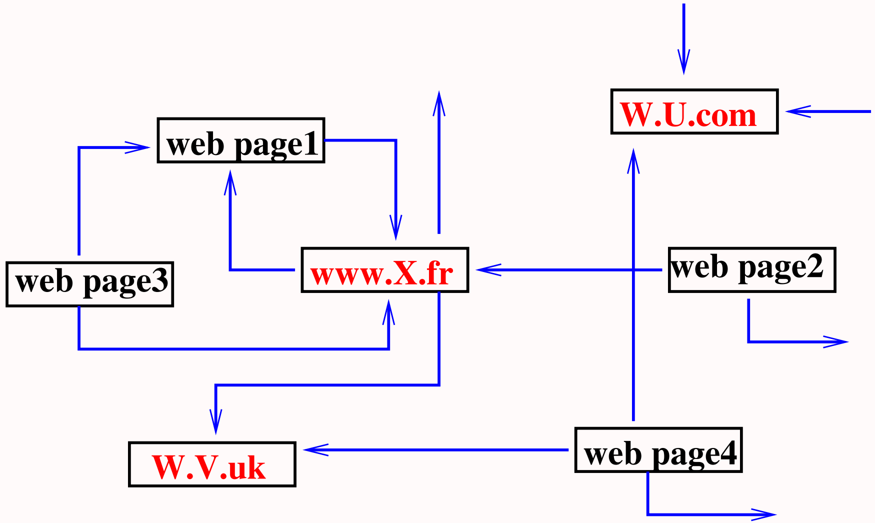


Marche aléatoire assymétrique
Indice de popularité d'une page web



$p(x, y) = 1/d_x^{\rightarrow}$, $d_x^{\rightarrow}$: degré sortant de x.

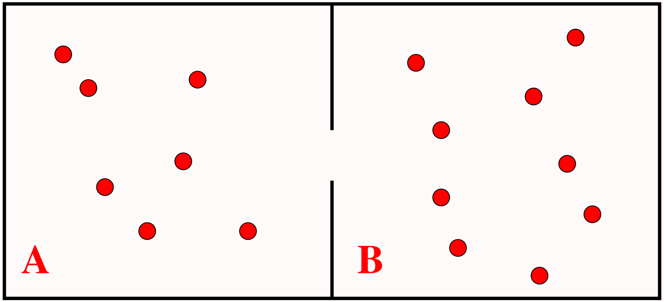
Marche aléatoire assymétrique
Indice de popularité d'une page web



$p(x,y) = 1/d_x^{\rightarrow}$, $d_x^{\rightarrow}$: degré sortant de x.

Modèle utilisé par Google.

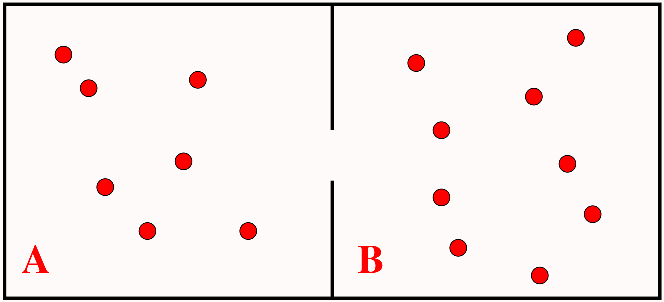
Exemple 4 : Urne d'Ehrenfest avec N particules



Dynamique :
une particule prise au hasard change de pièce.

M_n : nb de part. dans A à $t{=}n$, $0 \leq M_n \leq N$.

Exemple 4 : Urne d'Ehrenfest avec N particules



Dynamique :
une particule prise au hasard change de pièce.

M_n : nb de part. dans A à $t{=}n$, $0 \leq M_n \leq N$.

(M_n) Markov de matrice de transition :

$p(x, x-1) = x/N$ et $p(x, x+1) = 1 - x/N$

Exemple 5 : Collectionneur de Coupons

(X_n) var. ind. uniformes sur $\{1, \ldots, N\}$

$$M_n = \mathrm{card}\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\}$$

Exemple 5 : Collectionneur de Coupons

(X_n) var. ind. uniformes sur $\{1, \ldots, N\}$

$$M_n = \mathrm{card}\{\mathrm{X_1, \ldots, X_n}\}$$

(M_n) Markov de matrice de transition,

$$p(x, x+1) = 1 - \frac{x}{N} \quad \text{et} \quad p(x, x) = \frac{x}{N}$$

Exemple 5 : Collectionneur de Coupons

(X_n) var. ind. uniformes sur $\{1, \ldots, N\}$

$$M_n = \mathrm{card}\{\mathrm{X_1}, \ldots, \mathrm{X_n}\}$$

(M_n) Markov de matrice de transition,

$$p(x, x+1) = 1 - \frac{x}{N} \quad \text{et} \quad p(x, x) = \frac{x}{N}$$

Remarque : $p(N, N) = 1$, état N absorbant.

Exemple 6 : Processus de Galton-Watson

- Un individu donne naissance à G individus ; G variable aléatoire.

- Z_n : nb. d'invidus de la n-ième génération, $Z_0 = 1$.

- (Z_n) chaîne de Markov.

Exemple 6 : Processus de Galton-Watson

- Un individu donne naissance à G individus ; G variable aléatoire.

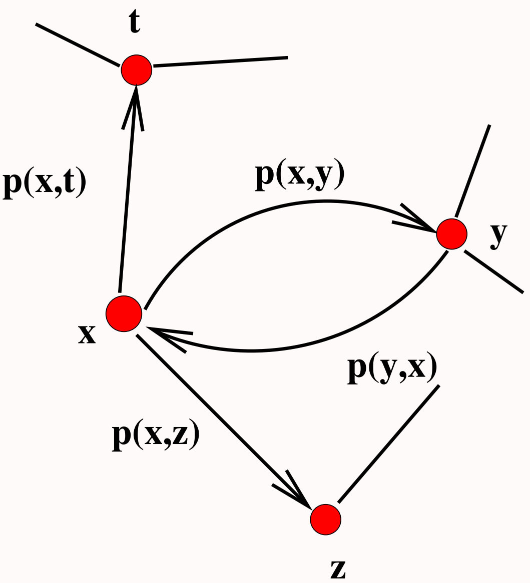
- Z_n : nb. d'invidus de la n-ième génération, $Z_0 = 1$.

- (Z_n) chaîne de Markov.

Transitions : $|u| < 1$,

$$\mathbb{E}\left(u^{Z_{n+1}} \middle| Z_n = x\right) = \left(\mathbb{E}\left(u^G\right)\right)^x$$

Représentation en terme de graphe d'une chaîne de Markov



http://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Loi d'une chaîne de Markov

(Poly. page 90)

Si (M_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition $P = (p(x, y))$

ν la loi initiale : $\mathbb{P}(M_0 = x_0) = \nu(x_0)$,

Loi d'une chaîne de Markov

(Poly. page 90)

Si (M_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition $P=(p(x,y))$

ν la loi initiale : $\mathbb{P}(M_0=x_0)=\nu(x_0)$,

Proba d'une trajectoire

$$\mathbb{P}(M_0=x_0, M_1=x_1, \ldots, M_n=x_n)$$
$$=\nu(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{n-1},x_n).$$

pour x_1, . . . , $x_n \in \mathcal{S}$,

Loi d'une chaîne de Markov (II)

$$\mathbb{P}(M_n = y)$$
$$= \sum_{x_0,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{S}} \nu(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{n-1},y).$$

Représentation vectorielle :

$$\mathbb{P}(M_n = y) = \left(\nu \cdot P^n\right)(y)$$

Loi d'une chaîne de Markov (II)

$$\mathbb{P}(M_n = y) = \sum_{x_0,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{S}} \nu(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{n-1},y).$$

Représentation vectorielle :

$$\mathbb{P}(M_n = y) = \left(\nu \cdot P^n\right)(y)$$

Les puissances de la matrice P donnent la loi de la suite (M_n).

Loi d'une chaîne de Markov (III)

Cas particulier

$$\mathbb{P}(M_n = y | M_0 = x) = (P^n)(x, y)$$

probabilité de passer de x à y en n étapes.

$$p^n(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(M_n = y | M_0 = x)$$

Notation markovienne

- (M_n) chaîne de Markov sur $\mathcal{S}$;
- ν loi de proba sur $\mathcal{S}$.

Notation markovienne

- (M_n) chaîne de Markov sur $\mathcal{S}$;
- ν loi de proba sur $\mathcal{S}$.

Pour $A \subset \mathcal{S}$ et $n \geq 1$,
$\mathbb{P}_\nu$: loi de (M_n) quand $\mathbb{P}(M_0 \in A) = \nu(A)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\nu(M_n \in A) \\
&= \sum_{x_0 \in \mathcal{S}, y \in A} \nu(x_0)\mathbb{P}(M_n = y | M_0 = x_0) \\
&= \sum_{x_0 \in \mathcal{S}, y \in A} \nu(x_0) P^n(x_0, y)
\end{aligned}$$

Notation markovienne (II)

Si $x \in \mathcal{S}$,

$$\mathbb{P}_x(M_n \in A) = \mathbb{P}(M_n \in A \mid M_0 = x).$$

En fait

$$\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{\delta_x}$$

2. Propriétés des chaînes de Markov

Définition : Le passé avant l'instant t

$\mathcal{F}_t$: ensemble des événements possibles avant l'instant t pour la chaîne de Markov (M_n) :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{P}(\{M_0 = x_0, M_1 = x_1, \ldots, M_t = x_t\}, \\ x_0, \ldots, x_t \in \mathcal{S})$$

Définition : Le passé avant l'instant t

$\mathcal{F}_t$: ensemble des événements possibles avant l'instant t pour la chaîne de Markov (M_n) :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{P}(\{M_0 = x_0, M_1 = x_1, \ldots, M_t = x_t\}, \\ x_0, \ldots, x_t \in \mathcal{S})$$

- $(\mathcal{F}_t) \nearrow$;
- $\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$: ensembles de tous les événements possibles.

Définition : Le passé avant l'instant t

$\mathcal{F}_t$: ensemble des événements possibles avant l'instant t pour la chaîne de Markov (M_n) :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{P}(\{M_0 = x_0, M_1 = x_1, \ldots, M_t = x_t\}, \\ x_0, \ldots, x_t \in \mathcal{S})$$

- $(\mathcal{F}_t) \nearrow$;
- $\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$: ensembles de **tous** les événements possibles.

$(\mathcal{F}_t)$ est la **filtration** de la chaîne de Markov.

La propriété de Markov reformulée

$$\mathbb{P}(M_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(M_{n+1} \in A \mid M_n)$$

Propriété d'irréductibilité

(Poly. page 96)

La chaîne de Markov (M_n) est **irréductible** si,

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \exists n \geq 0 : \mathbb{P}(M_n = y \mid M_0 = x) > 0.$$

Propriété d'irréductibilité

(Poly. page 96)

La chaîne de Markov (M_n) est **irréductible** si,

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \exists n \geq 0 : \mathbb{P}(M_n = y \mid M_0 = x) > 0.$$

Sur le graphe de la chaîne de Markov :
il existe un chemin de x à y.

Propriété d'irréductibilité

(Poly. page 96)

La chaîne de Markov (M_n) est **irréductible** si,

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \exists n \geq 0 : \mathbb{P}(M_n = y \mid M_0 = x) > 0.$$

Sur le graphe de la chaîne de Markov :
il existe un chemin de x à y.

Si non-irréductible :
décomposition en composantes connexes.

3. Équilibre des chaînes de Markov

Probabilité Invariante

(Poly. page 104)

Proba $(\pi(x) : x \in \mathcal{S})$ sur $\mathcal{S}$ est invariante pour la matrice de transition $(p(x,y))$ si

$$\pi(x) = \sum_{y} \pi(y) p(y,x), \forall x \in \mathcal{S}.$$

Probabilité Invariante

(Poly. page 104)

Proba $(\pi(x) : x \in \mathcal{S})$ sur $\mathcal{S}$ est invariante pour la matrice de transition $(p(x, y))$ si

$$\pi(x) = \sum_{y} \pi(y) p(y, x), \forall x \in \mathcal{S}.$$

Notation vectorielle : π invariante si

$$\pi = \pi \cdot P$$

π vecteur propre pour la valeur propre 1.

Propriété de Stationarité

Si π probabilité invariante et (M_n) telle que

$$\mathbb{P}(M_0 = x) = \pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{S}$$

Propriété de Stationarité

Si π probabilité invariante et (M_n) telle que

$$\mathbb{P}(M_0 = x) = \pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{S}$$

alors

$$\mathbb{P}(M_n = x) = \pi(x) \qquad \forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{S}$$

La loi des positions successives de la chaîne de Markov ne change pas.

Propriété de Stationarité

Si π probabilité invariante et (M_n) telle que

$$\mathbb{P}(M_0 = x) = \pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{S}$$

alors

$$\mathbb{P}(M_n = x) = \pi(x) \qquad \forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{S}$$

La loi des positions successives de la chaîne de Markov ne change pas.

La chaîne de Markov est à l'équilibre.

Exemple : Chaîne alternée

Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-a_0 & a_0 \\ a_1 & 1-a_1 \end{pmatrix}$$

Exemple : Chaîne alternée

Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-a_0 & a_0 \\ a_1 & 1-a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi(x) = \sum_y \pi(y)p(y,x)$$

Équation de probabilité invariante :

$$\pi(0) = (1-a_0)\pi(0) + a_1\pi(1)$$
$$\pi(1) = (1-a_1)\pi(1) + a_0\pi(0)$$

et $\pi(1) + \pi(0) = 1$.

Exemple : Chaîne alternée

Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-a_0 & a_0 \\ a_1 & 1-a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi(x) = \sum_y \pi(y)p(y,x)$$

Équation de probabilité invariante :

$$\pi(0) = (1-a_0)\pi(0) + a_1\pi(1)$$
$$\pi(1) = (1-a_1)\pi(1) + a_0\pi(0)$$

et $\pi(1) + \pi(0) = 1$.

$$\pi(0) = \frac{a_1}{a_0+a_1} \qquad \pi(1) = \frac{a_0}{a_0+a_1}$$

Exemple : Marche aléatoire sur un graphe

$\mathcal{G} = \{1, 2, \ldots N\}$

$$p(x, y) = \frac{1}{d_x}$$

si $x \sim y$, d_x degré de x.

Probabilité invariante :

$$\pi(x) = C d_x, \quad C = 1 \bigg/ \sum_{y=1}^{N} d_y \,.$$

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Graphes assymétriques : Le modèle de Google

$$\pi(x) = \sum_{y \in \mathcal{G}} \pi(y)/d_y^{\rightarrow}$$

$\pi(x)$: Importance de la page x.
Expression explicite inconnue en général.

Graphes assymétriques : Le modèle de Google

$$\pi(x) = \sum_{y \in \mathcal{G}} \pi(y)/d_y^{\rightarrow}$$

$\pi(x)$: Importance de la page x.
Expression explicite inconnue en général.

Recherche de "XXXX" sur Internet (principe) :

– Ensemble E des pages contenant la réf. "XXXX" ;
– Classer $E = \{P_1, P_2, \ldots\}$ tel que $\pi(P_1) > \pi(P_2) > \cdots$.

Exemple : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Matrice de transition

$$p(n, n+1) = p(n, n-1) = 1/2.$$

Solution des équations de proba invariante :

$$\pi(n) = C, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exemple : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Matrice de transition

$$p(n, n+1) = p(n, n-1) = 1/2.$$

Solution des équations de proba invariante :

$$\pi(n) = C, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Non sommable : Pas de probabilité invariante.
Pas d'équilibre.

Unicité

Proposition

Une chaîne de Markov irréductible a au plus une probabilité invariante.

Unicité

Proposition

Une chaîne de Markov irréductible a au plus une probabilité invariante.

Proposition

Une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini a une unique probabilité invariante.

Convergence en loi

Théorème (Poly. page 108)

Si (M_n) Markov irréductible et apériodique avec une probabilité invariante $(\pi(z), z \in \mathcal{S})$, pour $x \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M_n = x) = \pi(x).$$

Convergence en loi

Théorème (Poly. page 108)

Si (M_n) Markov irréductible et apériodique avec une probabilité invariante $(\pi(z), z \in \mathcal{S})$, pour $x \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M_n = x) = \pi(x).$$

Expression de π :
Calcul des puissances de la matrice de transition $(p(x, y))$.

$\Rightarrow$ en général : Difficile et inefficace.

Théorème ergodique

Proposition (Poly. page 110)

Si (M_n) Markov **irréductible** avec une probabilité invariante $(\pi(z), z \in \mathcal{S})$,
alors $\mathbb{P}$-presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(M_i) = \mathbb{E}_\pi(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{x\in\mathcal{S}} \pi(x) f(x)$$

pour toute fn f telle que $\mathbb{E}_\pi(|f|) < + = \infty$.

Application

Si $A \subset \mathcal{S}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{M_i\in A\}} = \pi(A) = \sum_{x\in A}\pi(x)$$

Application

Si $A \subset \mathcal{S}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{M_i\in A\}} = \pi(A) = \sum_{x\in A} \pi(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{M_i=x\}} = \pi(x)$$

Application

Si $A \subset \mathcal{S}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{M_i\in A\}} = \pi(A) = \sum_{x\in A}\pi(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{M_i=x\}} = \pi(x)$$

Principe de base de la simulation

4. Propriété de Markov fort

Définition : Les temps d'arrêts

(Poly. page 93)

T variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un **temps d'arrêt** si,

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad n \geq 1,$$

Définition : Les temps d'arrêts

(Poly. page 93)

T variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un **temps d'arrêt** si,

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad n \geq 1,$$

Traduction :
Un observateur qui observe les états successifs de la trajectoire de (M_n), sait s'arrêter à l'instant T.

Exemples de temps d'arrêt

– $p \geq 0$, $T \equiv p$;

Exemples de temps d'arrêt

- $p \geq 0$, $T \equiv p$;

- Temps d'atteinte d'un sous-ensemble : $F \subset \mathcal{S}$,

$$T_F = \inf\{n : M_n = F\}$$

  si $x \in \mathcal{S}$,

$$T_x = \inf\{n : M_n = x\}$$

Exemples de temps d'arrêt

- $p \geq 0$, $T \equiv p$;
- Temps d'atteinte d'un sous-ensemble : $F \subset \mathcal{S}$,

$$T_F = \inf\{n : M_n = F\}$$

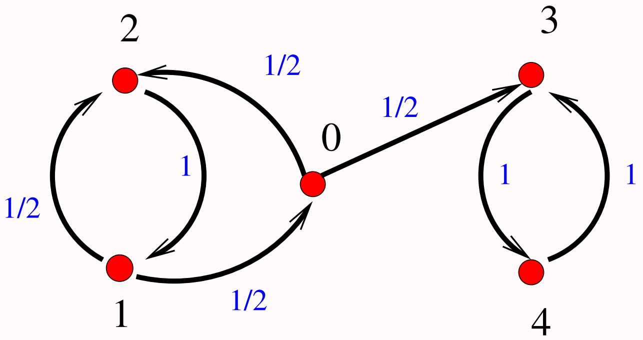
si $x \in \mathcal{S}$,

$$T_x = \inf\{n : M_n = x\}$$

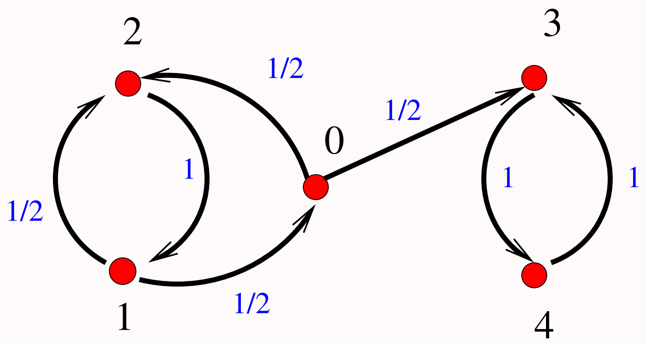
- Si $\mathcal{S}$ fini : Temps de recouvrement

$$\tau = \inf\{n : \{M_0, M_1, \ldots, M_n\} = \mathcal{S}\}$$

Contre-exemple



Contre-exemple



$$M_0 = 0, \qquad L = \sup\{n : M_n = 0\}$$

n'est pas un temps d'arrêt.

Le passé avant un temps d'arrêt T

$$\mathcal{F}_T = \bigcup_{t=0}^{+\infty} \bigcup_{x_0,\ldots,x_t \in \mathcal{S}}$$

$$\mathcal{P}(\{M_0 = x_0, M_1 = x_1, \ldots, M_t = x_t, T \geq t\})$$

$\mathcal{F}_T$: tous les événements avant l'instant T

Markov fort

Une chaîne de Markov (M_n) (Poly. page 94)

Markov fort

Une chaîne de Markov (M_n) (Poly. page 94)

vérifie toujours la propriété de Markov fort :

Si T temps d'arrêt :

$$\mathbb{P}(M_{T+n} = y \mid T < +\infty, M_T = x_T, \ldots, M_0 = x_0)$$
$$= \mathbb{P}(M_{T+n} = y \mid T < +\infty, M_T = x_T).$$

Markov fort

Une chaîne de Markov (M_n) (Poly. page 94)

vérifie toujours la propriété de Markov fort :

Si T temps d'arrêt :

$$\mathbb{P}(M_{T+n} = y \mid T < +\infty, M_T = x_T, \ldots, M_0 = x_0)$$
$$= \mathbb{P}(M_{T+n} = y \mid T < +\infty, M_T = x_T).$$

Propriété de Markov à des instants
non déterministes : les temps d'arrêt.

Markov fort (II)

Traduction :

$$P(M_{T+n} \in \cdot \mid \mathcal{F}_T, T < +\infty) = \mathbb{P}(M_{T+n} \in \cdot \mid M_T, T < +\infty)$$

Exemple

Si $x \in \mathcal{S}$, $T_x = \inf\{n : M_n = x\}$
En supposant $T_x < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

Markov fort :

$$\mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x}, \ldots, M_0) \\ = \mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x})$$

Exemple

Si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$, $\boldsymbol{T_x = \inf\{n : M_n = x\}}$
En supposant $\boldsymbol{T_x < +\infty}$ $\mathbb{P}$-p.s.

Markov fort :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x}, \ldots, M_0) \\ = \mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x} = x)\end{aligned}$$

Exemple

Si $x \in \mathcal{S}$, $T_x = \inf\{n : M_n = x\}$
En supposant $T_x < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

Markov fort :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x}, \ldots, M_0) \\ = \mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x} = x) \\ = \mathbb{P}(M_n \in A \mid M_0 = x).\end{aligned}$$

Exemple

Si $x \in \mathcal{S}$, $T_x = \inf\{n : M_n = x\}$
En supposant $T_x < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

Markov fort :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x}, \ldots, M_0) \\ &= \mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x} = x) \\ &= \mathbb{P}(M_n \in A \mid M_0 = x).\end{aligned}$$

La suite (M_{n+T_x}) est indépendante des variables $M_{T_x-1}, \ldots, M_0$.

Exemple

Si $x \in \mathcal{S}$, $T_x = \inf\{n : M_n = x\}$
En supposant $T_x < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

Markov fort :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x}, \dots, M_0) \\ &= \mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x} = x) \\ &= \mathbb{P}(M_n \in A \mid M_0 = x).\end{aligned}$$

La suite (M_{n+T_x}) est indépendante
des variables $M_{T_x-1}, \dots, M_0$.

Décomposition en cycles indépendants.