Cours n°2

Processus de Poisson – Modèles d'accès

Mercredi 4 octobre 2006

http ://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Table des matières

1 Propriété de Markov fort 3

2 Loi de Poisson et loi exponentielle 15

3 Le processus de Poisson 32

4 Propriétés des processus de Poisson 39

5 Propriétés temporelles 49

1. Propriété de Markov fort

Rappels

Passé avant l'instant t :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{P}(\{M_0=x_0, M_1=x_1, \ldots, M_t=x_t\}, \quad x_0, \ldots, x_t \in \mathcal{S})$$

Propriété de Markov :

$\forall A \subset \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(M_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(M_{n+1} \in A \mid M_n)$$

Rappels (II)

Une chaîne de Markov est déterminée par

1. ν la loi initiale : $\mathbb{P}(M_0 = x_0) = \nu(x_0)$,
2. sa matrice de transition $P = (p(x, y))$

$$p(x, y) = \mathbb{P}(M_1 = y \mid M_0 = x).$$

$$\mathbb{P}(M_0 = x_0, M_1 = x_1, \ldots, M_n = x_n) \\ = \nu(x_0)p(x_0, x_1)p(x_1, x_2)\cdots p(x_{n-1}, x_n).$$

Rappels (III)

Probabilité invariante :
Une probabilité $(\pi(x) : x \in \mathcal{S})$ sur $\mathcal{S}$ est invariante pour la matrice de transition $(p(x, y))$ si

$$\pi(x) = \sum_y \pi(y)p(y, x), \forall x \in \mathcal{S}.$$

Si (M_n) est irréductible et apériodique avec une proba. invariante π, alors M_n converge en distribution vers π :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_y(M_n = x) = \pi(x), \qquad \forall x \in \mathcal{S}$$

Définition : Les temps d'arrêts

(Poly. page 93)

T variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si,

$\{T = n\}$ ne dépend que de $M_0, M_1, \ldots, M_n$
$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad n \geq 1,$

Traduction :
Un observateur qui observe les états successifs de la trajectoire de (M_n), sait s'arrêter à l'instant T.

Exemples de temps d'arrêt

– $p \geq 0$, $T \equiv p$;

– Temps d'atteinte d'un sous-ensemble : $F \subset \mathcal{S}$,

$$T_F = \inf\{n : M_n = F\}$$

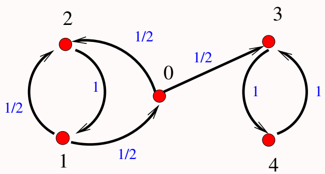
si $x \in \mathcal{S}$,

$$T_x = \inf\{n : M_n = x\}$$

– Si $\mathcal{S}$ fini : Temps de recouvrement

$$\tau = \inf\{n : \{M_0, M_1, \ldots, M_n\} = \mathcal{S}\}$$

Contre-exemple



$$M_0 = 0, \qquad L = \sup\{n : M_n = 0\}$$

n'est pas un temps d'arrêt.

Le passé avant un temps d'arrêt T

$$\mathcal{F}_T = \bigcup_{t=0}^{+\infty} \bigcup_{x_0,\ldots,x_t \in \mathcal{S}}$$

$$\mathcal{P}(\{M_0 = x_0, M_1 = x_1, \ldots, M_t = x_t, T \geq t\})$$

$\mathcal{F}_T$: tous les événements avant l'instant T

Markov fort

Une chaîne de Markov (M_n) (Poly. page 94) vérifie toujours la propriété de Markov fort :

Si T temps d'arrêt :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{T+n} = y \mid T < +\infty, M_T = x_T, \ldots, M_0 = x_0) \\ = \mathbb{P}(M_{T+n} = y \mid T < +\infty, M_T = x_T) \\ = \mathbb{P}(M_n = y \mid M_0 = x_T).\end{aligned}$$

Propriété de Markov à des instants non déterministes : les temps d'arrêt.

Markov fort (II)

Traduction :

$$\begin{aligned}P(M_{T+n} \in \cdot \mid \mathcal{F}_T, T < +\infty) \\ = \mathbb{P}(M_{T+n} \in \cdot \mid M_T, T < +\infty)\end{aligned}$$

Exemple

Si $x \in \mathcal{S}$, $T_x = \inf\{n : M_n = x\}$
En supposant $T_x < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

Markov fort :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x}, \dots, M_0) \\ &= \mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x} = x) \\ &= \mathbb{P}(M_n \in A \mid M_0 = x).\end{aligned}$$

La suite (M_{n+T_x}) est indépendante des variables $M_{T_x-1}, \dots, M_0$.

Propriétés de Récurrence

Proposition (Poly. page 107)

Si (M_n) Markov irréductible avec une probabilité invariante $(\pi(z), z \in \mathcal{S})$, si $x_0 \in \mathcal{S}$ et

$$T_{x_0} = \inf\{n > 0 : M_n = x_0\}$$

alors $T_{x_0} < +\infty$ presque sûrement
et $\mathbb{E}(T_{x_0}) < +\infty$.

Markov fort $\Rightarrow$ (M_n) visite une ∞ de fois x_0

Décomposition en cycles indépendants.

2. Loi de Poisson et loi exponentielle

Loi de Poisson

Définition

(Poly. page 136)

Definition. Une variable aléatoire ν suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\nu = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Moyenne :

$$\mathbb{E}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(\nu = n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda$$

Variance :

$$\mathbb{E}\left(\nu^2\right) - \mathbb{E}(\nu)^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(\nu = n) - \lambda^2 = \lambda$$

Fonction génératrice : $|u| \leq 1$,

$$\mathbb{E}\left(u^\nu\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\nu = n)u^n$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} u^n = e^{-\lambda(1-u)}$$

Rayon de convergence infini.

Modèles d'accès à un réseau de communication

Le cadre :

– N stations.

– Stations indépendantes.

p_N : Proba. d'émission par station par unité de temps ;

Hypothèse : N grand et p_N petit.

ν : le nombre d'émissions par unité de temps.

$$\nu = \sum_{i=1}^{N} 1_{E_i}$$

E_i : la station i émet un message.

Si $p_N = \mathbb{P}(E_1) \sim \lambda/N$

$$\mathbb{P}(\nu = k) = C_N^k \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{N!}{(N-k)!N^k} \times e^{(N-k)\log(1-\lambda/N)} \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ν suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Propriétés générales

Addition (Poly. page 137)

Si pour $i = 1, 2$,

– X_i : loi de Poisson de paramètre λ_i ;

– X_1 et X_2 sont indépendantes ;

alors $X_1 + X_2$ loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$\mathbb{E}\left(u^{X_1+X_2}\right) = \mathbb{E}\left(u^{X_1}\right)\mathbb{E}\left(u^{X_2}\right) = \exp(-(\lambda_1+\lambda_2)(1-u)),$$

Propriétés générales (II)

Effacement : Si

– X loi de Poisson de paramètre λ ;

– (B_i) Bernoulli i.i.d. paramètre p
$B_i \in \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(B_1 = 1) = p$,

alors $S = B_1 + B_2 + \cdots + B_X$

suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Propriétés générales (III)

Effacement (II) : Si

– X loi de Poisson de paramètre λ ;
– (B_i) Bernoulli i.i.d. paramètre p
$B_i \in \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(B_1 = 1) = p$,

alors

$B_1+B_2+\cdots+B_X$ et $X-(B_1+B_2+\cdots+B_X)$

sont des variables indépendantes,

de loi de Poisson de paramètre λp et $\lambda(1-p)$.

Loi des petits nombres

Cas indépendant (Poly. page 137)

Si B_i^n, $1 \leq i \leq N_n$ Bernoulli indépendantes

a) $\lim_{n\to+\infty} \sup_i \mathbb{P}(B_i^n = 1) = 0$;

b) $\lim_{n\to+\infty} \sum_i \mathbb{P}(B_i^n = 1) = \lambda < +\infty$,

alors

$$S_n = B_1^n + B_2^n + \cdots + B_{N_n}^n \stackrel{\text{Loi}}{\to} \text{Pois}(\lambda)$$

Avantage de la cv vers une loi de Poisson

Simplification d'expressions combinatoires complexes par une fonctionnelle de la loi de Poisson.

La loi exponentielle

Définition

(Poly. page 139)

Pour $\lambda > 0$, X suit une distribution exponentielle de paramètre λ si

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_0^{+\infty} f(x)\lambda e^{-\lambda x}\,dx,$$

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \exp(-\lambda x), \qquad x \geq 0.$$

Moyenne :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

Variance :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda}$$

Transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}\left(e^{-\xi X}\right) = \frac{\lambda}{\lambda+\xi}, \qquad Re(\xi) \geq 0.$$

Modèles d'accès à un réseau de communication (II)

Le cadre :
– Faible probabilité d'émission par station par unité de temps : $p_N = \lambda/N$.
τ_N première unité de temps où une station fixée émet un message.

$$\mathbb{P}(\tau_N \geq k) = (1-\lambda/N)^k,$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{\tau_N}{N} \geq x\right) = (1-\lambda/N)^{\lceil Nx \rceil} \sim e^{-\lambda x}$$

$$\frac{\tau_N}{N} \to X, \text{ où } X \text{ exp. param. } \lambda.$$

La propriété d'oubli

Si X v.a. exp para. λ, alors
$$\mathbb{P}(X - x \geq y \mid X \geq x) = e^{-\lambda y} = \mathbb{P}(X \geq y).$$

Preuve :
$$\mathbb{P}(X - x \geq y \mid X \geq x) = \frac{\mathbb{P}(X \geq x+y)}{\mathbb{P}(X \geq x)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y}.$$

Propriété élémentaire mais cruciale.

Seule loi continue avec cette propriété.

Les horloges exponentielles

(Poly. page 140)

$(E_1, \ldots, E_N)$, v.a. indép. exp. de par. λ_i.
E_i : instant de sonnerie de la i-ième horloge.

La variable
$$\min(E_1, E_2, \ldots, E_N)$$
suit une loi exponentielle de paramètre
$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_N.$$

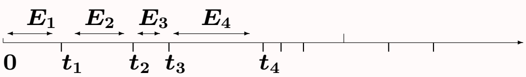
L'instant de première sonnerie correspond à une horloge exponentielle.

3. Le processus de Poisson

Définition

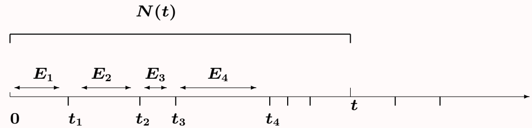
– (E_i) v.a. i.i.d. exponentielles de par. λ ;

– $t_n = E_1 + \cdots + E_n$;



$\{t_n,\ n \geq 1\}$: Processus de Poisson d'intensité/paramètre λ.

De façon équivalente : fn croissante $t \to N(t)$,
– $N(t)$: nombre de points t_n entre 0 et t.



$N(0) = 0$ et $N(t) - N(t-) \in \{0, 1\}$;

$(N(t))$ est la mesure de comptage du processus de Poisson.

Modélisation Probabiliste

Deux processus fondamentaux :

– Le mouvement brownien.
Décrit les évolutions aléatoires continues.

$$dB(t)$$

– Le processus de Poisson.
Modèles aléatoires évoluant par sauts.

$$\Delta N(t) = N(t) - N(t-)$$

Exemple 1

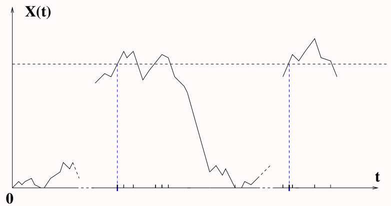
Modèles d'accès à un réseau de communication

Le cadre : (Poly. page 149)
– Proba. d'émission par station
par unité de temps : $p_N = \lambda/N$;
t_k^N : instant d'émission du k-ième message d'une station fixée.

La suite de points $(t_k^N/N, k \geq 0)$ converge en distribution vers un processus de Poisson (t_k) de paramètre λ.

Approximation : $(t_k^N, k \geq 0) \overset{\text{dist}}{\sim} (N t_k)$.

Exemple 2 : Phénomènes de débordement



$(X(t))$: niveau d'une mémoire tampon.

Exemple 3

Lancer de points sur la demi-droite réelle

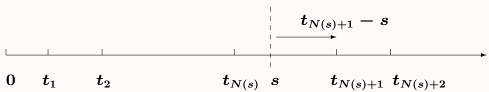
$\lfloor \lambda N \rfloor$ points sont lancés au hasard sur $[0, N]$.
t_i^N : position du i-ième point à partir de 0.

La suite $(t_i^N) \overset{\text{dist.}}{\longrightarrow}$ processus de Poisson d'intensité λ sur $\mathbb{R}_+$ quand $N \to +\infty$.

Processus de Poisson :
lancer de points au hasard sur $\mathbb{R}_+$

4. Propriétés des processus de Poisson

Translation d'un processus de Poisson



Le processus de Poisson après l'instant s :

La variable $t_{N(s)+1} - s$ est exp. de paramètre λ

$t_{N(s)+1} - s$ est indépendante de $t_1, \ldots, t_{N(s)}$

Translation d'un processus de Poisson (II)

Les points vus de s : $(t_{N(s)+k} - s, k \geq 0)$

– forment un processus de Poisson (λ)

– sont indépendants de t_1, . . . , $t_{N(s)}$.

$\Rightarrow$ proc. de Poisson invariant par translation

Preuve :
Propriété d'oubli de la loi exponentielle

Conséquences (II)

– nb de points dans $[0, s]$ indépendant
nb de points $[s, s + t]$

– $N(t + s) - N(s)$ a même loi que $N(t)$.

(Poly. page 148)

Accroissements indépendants
Si $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, les variables

$$N(a_1), N(a_2) - N(a_1), \ldots, N(a_n) - N(a_{n-1})$$

sont indépendantes.

Le processus de Poisson est l'unique processus à valeur entières tel que

– processus croissant avec des sauts $+1$;

– invariant par translation ;

– à accroissements indépendants.

Opérations sur les processus de Poisson

Superposition

$M = (s_n)$, $N = (t_n)$ proc. Poisson indépendants d'intensité μ et λ, alors

$$P = M + N = (\{s_n\} \cup \{t_n\})$$

est un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu$.

Opérations sur les processus de Poisson

Effacement

Si (B_i) Bernoulli i.i.d. paramètre p, indép. de $N = \{t_n\}$, les points

$$M_1 = \{t_n : B_n = 1\}$$

forment un processus de Poisson d'intensité λp.

Opérations sur les processus de Poisson

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Effacement (II)

Si (B_i) Bernoulli i.i.d. paramètre p, indép. de $N = \{t_n\}$, alors

$$M_1 = \{t_n : B_n = 1\} \text{ et } M_2 = \{t_n : B_n = 0\}$$

forment des processus de Poisson indépendants, d'intensités respectives λp et $\lambda(1-p)$.

Calculs de lois

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Sommes d'exponentielles.

La variable $t_n = E_1 + \cdots + E_n$ a pour densité sur $\mathbb{R}_+$

$$g_n(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}.$$

Le nb $N(t)$ de points dans $[0,t]$ suit une loi de Poisson de paramètre λt

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(t_n \leq t < t_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(t_n \leq t < t_n + E_{n+1}) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} 1_{\{x \leq t \leq x+y\}} g_n(x) \lambda e^{-\lambda y} \, dx \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} 1_{\{x \leq t \leq x+y\}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} \, dx \, dy \\
&= e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \, dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

5. Propriétés temporelles

Quelques définitions

$\mathcal{F}_t$: tribu des événements avant t
Tribu des événements s'exprimant avec les variables $N(s)$, $s \leq t$.

Temps d'arrêt :
Une v. aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

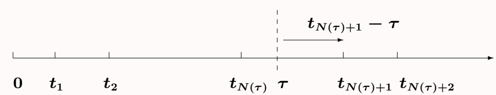
Exemples de temps d'arrêt

– T constant égal à t ;

– Pour $n \geq 1$, t_n est un temps d'arrêt :
$\{t_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$

– $T = \inf\{t \geq 0 : N([0, t/2]) = N([t/2, t])\}$
est un temps d'arrêt.

Translation d'un processus de Poisson : II



τ temps d'arrêt
Le processus de Poisson translaté à τ est

un processus de Poisson de même intensité ;

indépendant des points avant τ.

Translation d'un processus de Poisson

De façon équivalente,

$$(N(t+\tau)-N(\tau), t\geq 0) \perp \mathcal{F}_\tau,$$

$$(N(t+\tau)-N(\tau), t\geq 0) \stackrel{\text{dist.}}{=} (N(t), t\geq 0).$$

Propriété cruciale en pratique.

Propriétés infinitésimales

Si $p_n(t)=\mathbb{P}(N(t)=n)$,

$$\begin{aligned}p_n(t+h) &= \mathbb{P}(N(]0,t+h])=n)\\ &= \mathbb{P}(N(]0,t])=n)\times\mathbb{P}(N(]t,t+h])=0)\\ &\quad+\mathbb{P}(N(]0,t])=n-1)\times\mathbb{P}(N(]t,t+h])=1)\\ &\quad+\mathbb{P}(N(]0,t+h])=n)\times\mathbb{P}(N(]t,t+h])\geq 2)\end{aligned}$$

$$p_n(t+h)=p_n(t)\times(1-\lambda h)+p_{n-1}(t)\times\lambda h+o(h$$

Équations de Chapman-Kolmogorov

$t\to p_n(t)=\mathbb{P}(N(t)=n)$ vérifie

$$\frac{d}{dt}p_n(t)=\lambda p_{n-1}(t)-\lambda p_n(t),\quad n\geq 1.$$

$N(t)$ a loi de Poisson de paramètre λt

$$p_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

Équations C-K vraies pour
les Processus de sauts markoviens.