Cours n°3

Processus de sauts

Mercredi 11 octobre 2006

http ://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

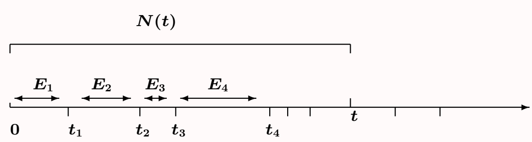
Table des matières

1. Le processus de Poisson (Rappels)

Définition

– (E_i) v.a. i.i.d. exponentielles, paramètre λ ;

– $t_n = E_1 + \cdots + E_n$;



$\{t_n,\ n \geq 1\}$: Processus de Poisson d'intensité/paramètre λ.

Propriétés

- nb de points dans $[0, s]$ indépendant du nb de points dans $[s, s+t]$
- $N(t+s) - N(s)$ a même loi que $N(t)$.

(Poly. page 148)

Accroissements indépendants

Si $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, les variables

$$N(a_1), N(a_2) - N(a_1), \ldots, N(a_n) - N(a_{n-1})$$

sont indépendantes.

Calculs de lois

Sommes d'exponentielles.

La variable $t_n = E_1 + \cdots + E_n$ a pour densité sur $\mathbb{R}_+$

$$g_n(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}.$$

Le nb $N(t)$ de points dans $[0, t]$ suit une loi de Poisson de paramètre λt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(t_n \leq t < t_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(t_n \leq t < t_n + E_{n+1})
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} 1_{\{x \leq t \leq x+y\}} g_n(x) \lambda e^{-\lambda y} \, dx \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} 1_{\{x \leq t \leq x+y\}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} \, dx \, dy$$

$$= e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \, dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Le processus de Poisson : unique processus

- Invariant par translation ;
- Accroissements indépendants.
  nb de points $N(s)$ dans $[0, s]$ indépendant nb de points $[s, s+t]$
  $N(t+s) - N(s)$ a même loi que $N(t)$.
- Loi de $N(t)$: loi de Poisson de param. λt

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

2. Propriétés temporelles

Quelques définitions

$\mathcal{F}_t$: tribu des événements avant t
Tribu des événements s'exprimant avec les variables $N(s)$, $s \le t$.

Temps d'arrêt :
Une v. aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

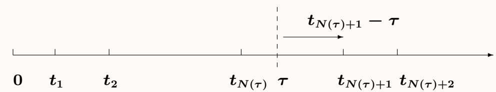
Exemples de temps d'arrêt

- T constant égal à t ;
- Pour $n \ge 1$, t_n est un temps d'arrêt :
  $\{t_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$
- $T = \inf\{t \ge 0 : N([0, t/2]) = N([t/2, t])\}$
  est un temps d'arrêt.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Translation d'un processus de Poisson : II



τ temps d'arrêt
Le processus de Poisson translaté à τ est

un processus de Poisson de même intensité ;

indépendant des points avant τ.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Translation d'un processus de Poisson

De façon équivalente,

$$(N(t+\tau) - N(\tau), t \geq 0) \perp \mathcal{F}_\tau,$$

$$(N(t+\tau) - N(\tau), t \geq 0) \stackrel{\text{dist.}}{=} (N(t), t \geq 0).$$

Propriété cruciale en pratique.

Propriétés infinitésimales

Si $p_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n)$,

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= \mathbb{P}(N(]0, t+h]) = n) \\ &= \mathbb{P}(N(]0,t]) = n) \times \mathbb{P}(N(]t, t+h]) = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(N(]0,t]) = n-1) \times \mathbb{P}(N(]t, t+h]) = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(N(]0,t+h]) = n) \times \mathbb{P}(N(]t, t+h]) \geq 2) \end{aligned}$$

$$p_n(t+h) = p_n(t) \times (1 - \lambda h) + p_{n-1}(t) \times \lambda h + o(h)$$

Équations de Chapman-Kolmogorov

$t \rightarrow p_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n)$ vérifie

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t), \quad n \geq 1.$$

$N(t)$ a loi de Poisson de paramètre λt

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Équations C-K vraies pour
les Processus de sauts markoviens.

3. Les processus de sauts

Les données

Un processus de sauts : **(Poly. page 157)**

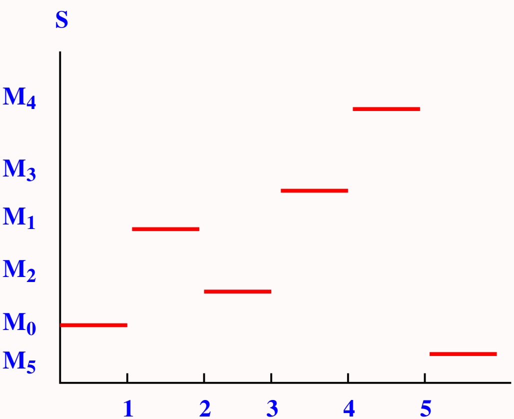
- (M_n) une chaîne de Markov sur $\mathcal{S}$ de matrice de transition $(p(x,y))$.
- $(q_x, x \in \mathcal{S})$ des réels > 0.

Définition de $(X(t))$ processus de sauts :

- $X(0) = M_0 = x \in \mathcal{S}$
  $X(t) = x$ pour $t < t_1 = E_1$
  E_1 : v.a. exponentielle paramètre q_x.
- $X(E_1^x) = M_1$
  $X(E_1^x + t) = M_1$ pour $t < E_2$
  E_2 v.a. exp. de paramètre q_{M_1}.
- $t_2 = E_1 + E_2$, $X(t_2) = M_3$, . . .

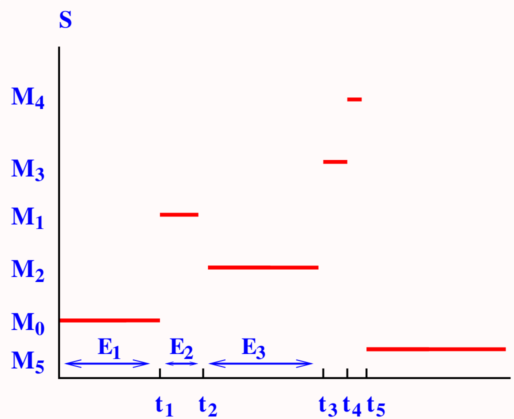
$(X(t))$ suit la même trajectoire que (M_n).

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert
http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert



La chaîne de Markov (M_n)

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert
http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert



Le processus de sauts $(X(t))$

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert
http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Suite des instants de sauts : (t_n) :

– $(X(t_n)) = (M_n)$;

– $t_{n+1} - t_n$ sachant $X(t_n) = z$:
variable exponentielle de paramètre q_z.

Processus de sauts :

Chaîne de Markov
avec une échelle de temps aléatoire.

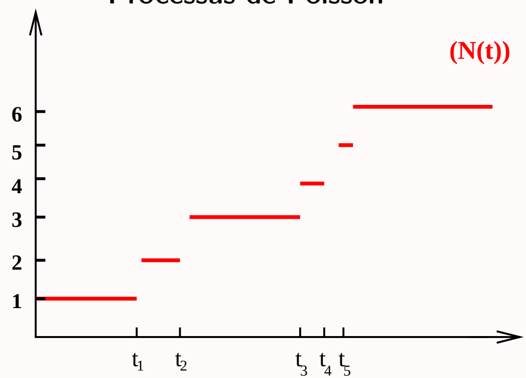
Des processus de sauts fondamentaux
pour modéliser les processus discrets

4. Quelques exemples

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Processus de Poisson



http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Processus alterné

Une machine

– En Fonctionnement. Durée activité :
dist. exp. de paramètre λ

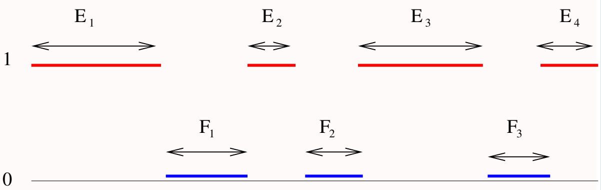
– En panne. Temps de réparation :
dist. exp. de paramètre μ

État du système :

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{activité à l'instant } t \\ 0 & \text{panne} \qquad\qquad\quad t \end{cases}$$

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert



(E_i) i.i.d. exp. par. λ : $\mathbb{P}(E_1 \geq x) = \exp(-\lambda x)$
(F_i) i.i.d. exp. par. μ : $\mathbb{P}(F_1 \geq x) = \exp(-\mu x)$

La file d'attente $M/M/1$

Requêtes à un nœud : (Poly. page 165)

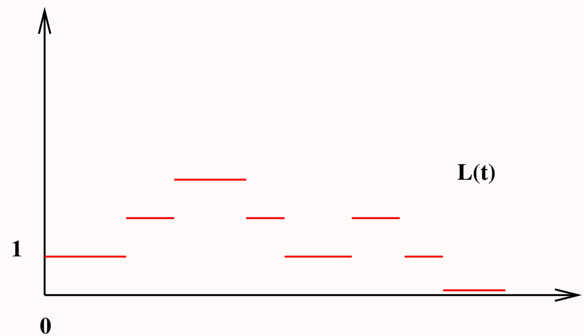
- Arrivées : Poisson d'intensité λ.
- Durée d'une communication : dist. exponentielle de paramètre μ.
- Service dans l'ordre des arrivées. FIFO (First In First Out).

La file d'attente $M/M/1$ (suite)

$L(t)$: nb de communications en attente à t.

Si $L(t) = n \geq 1$, le prochain événement après t a lieu à $t + T(t)$, c'est :

- Une arrivée. $L(t + T(t)) = n + 1$.
- Un départ. $L(t + T(t)) = n - 1$



Période d'occupation de la file M/M/1

La file d'attente $M/M/1$ (II)

À l'instant t :

- Propriété d'oubli de la loi exponentielle : la durée résiduelle du service en cours est σ : v.a. exp. (μ) indép. du service accompli.

- Propriété de Poisson : Prochaine arrivée à τ : v.a. exp. (λ) indépendant des arrivées et des services avant t.

La file d'attente $M/M/1$ (III)

À t, deux horloges exponentielles : σ et τ,

$$T(t) = \min(\sigma, \tau).$$

$T(t)$ a une dist. exp. de paramètre $\lambda + \mu$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T(t) \geq x, \tau < \sigma) &= \mathbb{P}(\tau \geq x, \tau < \sigma)\\ &= e^{-(\lambda+\mu)x}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\\ &= \mathbb{P}(T(t) \geq x)\mathbb{P}(\tau < \sigma)\end{aligned}$$

$L(t + T(t)) = n - 1$ si $\sigma < \tau$

$L(t + T(t)) = n + 1$ si $\sigma > \tau$.

La file d'attente $M/M/1$ (IV)

$L(t))$ est un processus de Sauts :

Si $L(0) = x > 0$ et E var. exp. par. $\lambda + \mu$: $L(t) = L(0)$ pour $t < E$ et

$$L(E) = \begin{cases} L(0) + 1 \text{ avec proba } \lambda/(\lambda+\mu) \\ L(0) - 1 \text{ avec proba } \mu/(\lambda+\mu) \end{cases}$$

Si $L(0) = 0$ et E var. exp. par. λ : $L(t) = L(0)$ pour $t < E$ et $L(E) = 1$.

La file d'attente $M/M/1$ (Fin)

$L(t))$ est un processus de Sauts :

- Chaîne de Markov :

$$p(x, x+1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

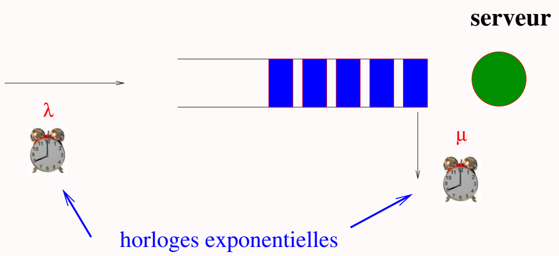
$$p(x, x-1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, x > 0$$

et $p(0, 1) = 1$.

- La suite(q_x)

$q_x = \lambda + \mu$ si $x > 0$ et $q_0 = \lambda$.

File M/M/1 FIFO



Partant de $x \in \mathbb{N}$, plus commode d'utiliser pour chaque transition

une horloge exponentielle pour chaque saut possible de taux resp. λ et $\mu 1_{\{x>0\}}$

plutôt qu'

une horloge exponentielle globale de taux $\lambda + \mu 1_{\{x>0\}}$.

Cas général

Formulation Équivalente

Si $X(0) = x$ (Poly. page 162) :

– pour $z \in \mathcal{S}$, E^z v.a. exp. de paramètre

$$q(x, z) \stackrel{\text{def.}}{=} q_x p(x, z);$$

– Les v.a. E^z, $z \in \mathcal{S}$ sont indépendantes.
horloges exponentielles au départ de x.

Si $t_1 = \inf\{E^z : z \in \mathcal{S}\}$,
t_1 : loi exponentielle de paramètre

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} q(x, y) = q_x \sum_{y \in \mathcal{S}} p(x, y) = q_x;$$

De plus

$$\mathbb{P}(t_1 = E^y) = \mathbb{P}(E^y \le \min(E^z, z \in \mathcal{S})) = \frac{q_x p(x,y)}{q_x} = p(x,y).$$

Horloges exponentielles

Si $X(0) = x$:

$X(t)$ reste en x jusqu'à l'instant t_1 de la sonnerie de la première horloge exponentielle

$X(t_1) = y$ si $t_1 = E^y$.

et ainsi de suite, ...

Construction alternative du processus de sauts

Matrice de sauts

La quantité clé : la matrice de sauts

$$Q = (q(x,y), x, y \in \mathcal{S})$$

$$q(x,y) = q_x p(x,y) \qquad x \ne y.$$
$$q(x,x) = -q_x.$$

contient les paramètres du proc. de sauts :

$$q_x = \sum_{y \in \mathcal{S}} q(x,y),$$
$$p(x,y) = q(x,y)/q_x, \qquad x \ne y.$$

Exemples

Processus de Poisson

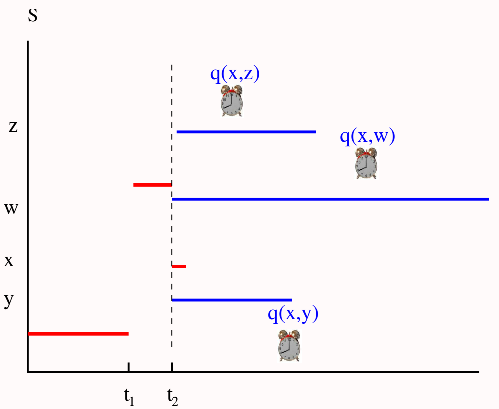
$$q(x, x+1) = \lambda, x \ge 0.$$

Processus alterné

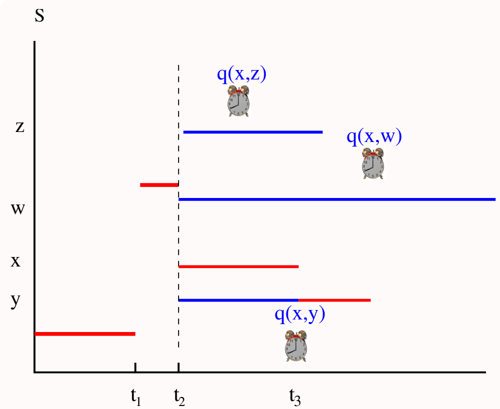
$$q(0,1) = \lambda, \qquad q(1,0) = \mu.$$

La file $M/M/1$

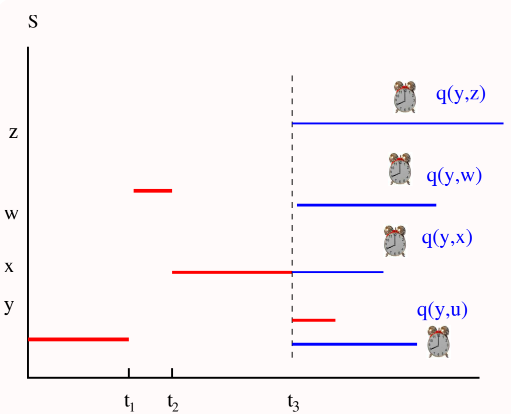
$$q(x, x+1) = \lambda;$$
$$q(x, x-1) = \mu 1_{x>0};$$



Un processus de sauts **(X(t))**



Un processus de sauts **(X(t))**



Un processus de sauts **(X(t))**

Processus de sauts non-explosifs

Définition Si (t_n) suite des instants de sauts de $(X(t))$ et $\mathbb{P}$ p.s.

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty,$$

le processus de sauts est dit non-explosif.

Processus explosifs délicats sur le plan théorique.

La propriété de Markov

Propriété de Markov :

$$[X(s+t)\,|\,X(u), u \le t, X(t)=x] \stackrel{\text{dist.}}{=} [X(s+t)\,|\,X(t)=x]$$

Propriété de Markov homogène :

$$[X(s+t)\,|\,X(u), u \le t, X(t)=x] \stackrel{\text{dist.}}{=} [X(s)\,|\,X(0)=x]$$

Théorème
Un processus de sauts non-explosif a la propriété de Markov

La propriété de Markov

$\mathcal{F}_t$: ensemble de tous les événements avant l'instant t.

$$\mathcal{F}_t = \langle X(s), s \le t \rangle$$

Sur l'événement $\{X(t)=x\}$.

$$\mathbb{E}\left[f(X(s+t))\,|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[f(X(s))\,|X(0)=x\right] \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{E}_x\left[f(X(s))\right].$$

Si $p^t(x,y) = \mathbb{P}(X(t)=y \mid X(0)=x)$

$$p^{t+s}(x,y) = \mathbb{P}(X(t+s)=y \mid X(0)=x) = \sum_{z\in\mathcal{S}} p^t(x,z)p^s(z,y).$$

Si $P(t) = (p^t(x,y), x, y \in \mathcal{S})$,

$$P^{s+t} = P^s \circ P^t,$$

Formule de semi-groupe $\Leftrightarrow$ Ppté Markov

$\Rightarrow$ "formule" exponentielle $P^t = \exp(tA)P(0)$.

La file d'attente $M/M/1$

Si $p^t(x,n) = \mathbb{P}(L(t) = n \mid L(0) = x)$

$$p^{t+h}(x,n) = \lambda h p^t(x,n-1) + \mu h p^t(x,n+1) + (1-(\lambda+\mu)h)p^t(x,n) + o(h)$$

$$\frac{d}{dt}p^t(x,n) = \lambda p^t(x,n-1) - (\lambda+\mu)p^t(x,n) + \mu p^t(x,n+1)$$

$$\frac{d}{dt}p^t(x,0) = -\lambda p^t(x,0) + \mu p^t(x,1)$$

Équations de Kolmogorov pour $M/M/1$

$$\frac{d}{dt}p^t(x,\cdot) = p^t(x,\cdot) \times Q.$$

$Q = (q(x,y))$ matrice de sauts de $(L(t))$,

$$q(x,x+1) = \lambda;$$
$$q(x,x-1) = \mu 1_{x>0};$$

et $q(x,x) = -\lambda - \mu 1_{x>0}$

5. Équations de Kolmogorov

Notation markovienne

Si $(X(t))$ est un processus markovien de sauts alors

$$\mathbb{P}_x(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{P}(A \mid X(0) = x),$$

si A est un événement et si F est une v.a. intégrable

$$\mathbb{E}_x(F) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{E}(F \mid X(0) = x).$$

Les équations de Kolmogorov : Cas général

Pour x, $y \in \mathcal{S}$, $p^t(x,y) = \mathbb{P}_x(X(t) = y)$,

$$\frac{d}{dt}p^t(x,y) = \sum_{z\neq y} p^t(x,z)q(z,y) - \left(\sum_{z\neq y} q(y,z)\right) p^t(x,y)$$
$$= \sum_z p^t(x,z)q(z,y)$$
$$= \sum_z q(x,z)p^t(z,y)$$

Équations de Kolmogorov forward et backward

Si $P(t) = (p^t(x,y), x, y \in \mathcal{S})$,

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\cdot Q = Q\cdot P(t).$$

Intuitivement (pas toujours rigoureux !!) :

$$P(t) = e^{tQ}P(0);$$

Cohérent avec l'équation de semi-groupe :

$$P^{s+t} = P^s \circ P^t.$$

Chaîne de Markov : analogue $Q = I - P$;
Mouvement Brownien $\Rightarrow$ $Q = \Delta$.

Caractérisation des processus de Markov

Si $\mathbb{P}$-p.s. (t_n) tend vers l'infini,
il existe une unique solution aux équations K.

Un processus markovien de sauts $(X(t))$ est caractérisé de façon univoque par

- sa valeur initiale $X(0)$;
- sa matrice de sauts Q.

Cas général (incluant proc. explosifs) délicat.

Aspects Fonctionnels

Forme fonctionnelle des équations K

(Poly. page 161)

Définition Si $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ est bornée,
$P(t) : f \to P(t, f)$

$$P(t, f)(x) = \mathbb{E}_x(f(X(t)) = \sum_{z \in \mathcal{S}} f(z)\mathbb{P}_x(X(t) = z).$$

Si $Q(f)$ est bornée, Équations K :

$$\frac{d}{dt}P(t)(f) = P(t) \circ Q(f) = Q \circ P(t, f),$$

$$P(t)(f) = P(0)(f) + \int_0^t P(s) \circ Q(f)\, ds$$

$$\mathbb{E}_x[f(X(t))] = \mathbb{E}_x[f(X(0))] + \int_0^t \mathbb{E}_x[Q(f)(X(s))]\, ds$$

d'où la forme intégrale :

$$\mathbb{E}_x[f(X(t))] = f(x) + \mathbb{E}_x\left(\int_0^t (Q \cdot f)(X(s))\, ds\right).$$

Pour tout $t \geq 0$ la variable

$$M(t) = f(X(t)) - f(x) - \int_0^t (Q \cdot f)(X(s))\, ds$$

est de moyenne nulle :

$(M(t))$ est une martingale,

$$f(X(t)) = f(x) + M(t) + \int_0^t (Q \cdot f)(X(s))\, ds$$

"formule d'Itô" des processus avec sauts.