Cours n°4

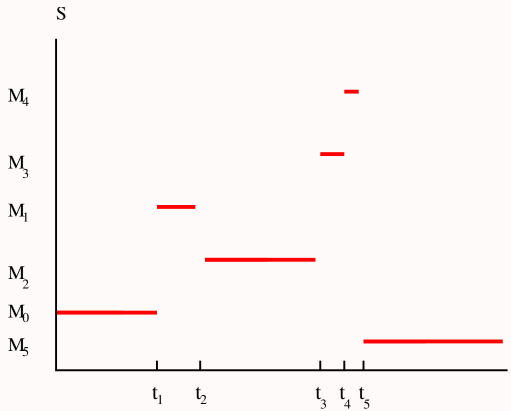
Processus de sauts – Équilibre

Mercredi 18 octobre 2006

http ://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Table des matières

1. Processus de Sauts



Le processus de sauts (X(t))

Définition

Un processus de sauts : (Poly. page 162)

– (M_n) une chaîne de Markov sur $\mathcal{S}$ de matrice de transition $(p(x,y))$.

– $(q_x, x \in \mathcal{S})$ des réels > 0.

(M_n) chaîne incluse du processus de sauts $(X(t))$.

Matrice de sauts

La quantité clé : la matrice de sauts

$$Q = (q(x,y), x, y \in \mathcal{S})$$

$$\begin{aligned} q(x,y) &= q_x p(x,y) \qquad x \neq y. \\ q(x,x) &= -q_x. \end{aligned}$$

Si $X(t) = x$:

– le proc. passe avec intensité $q(x,y)$ à y.

– Horloges exp. E_z, $z \in \mathcal{S}$ de paramètre $q(x,z)$ pour la transition suivante.

La propriété de Markov

Si $(X(t))$ non-explosif :

$$\left[X(s+t) \,\middle|\, X(u), u \leq t, X(t) = x\right] \stackrel{\text{dist.}}{=} [X(s) \,|\, X(0) = x]$$

Les équations de Kolmogorov

$$p^t(x,y) = \mathbb{P}_x(X(t) = y)$$

$$\frac{d}{dt} p^t(x,y) = \sum_{z \neq y} p^t(x,z) q(z,y) - \left(\sum_{z \neq y} q(y,z) \right) p^t(x,y)$$

$Q = (q(x,y))$ Matrice de sauts de $(X(t))$.

Les équations de Kolmogorov (II)

Pour $y \neq x$ et $t = 0$, (Poly. page 167)

$$\frac{d}{dt} p^t(x, y) \Big|_{t=0} = q(x, y)$$

$$q(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(X(t) = y \mid X(0) = x)$$

Équivalence :

$$\mathbb{P}_x(X(t) = y) \sim q(x, y)t + o(t)$$

Caractérisation des processus de Markov

(Poly. page 174)

Si $(X(t))$ non-explosif
il existe une unique solution aux équations K.

Un processus markovien de sauts $(X(t))$
caractérisé de façon univoque par

- la loi de sa valeur initiale $X(0)$;
- sa matrice de sauts Q.

La file d'attente $M/M/1$

Modèle probabiliste

- Arrivée processus de Poisson (λ).

- Service exponentiels (μ).

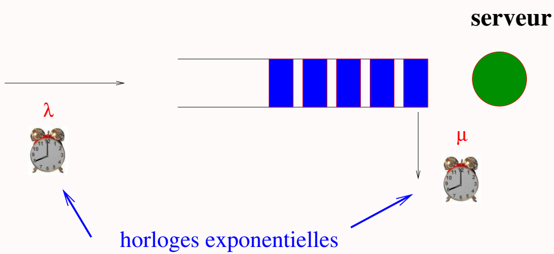
La file d'attente $M/M/1$

Disciplines de service

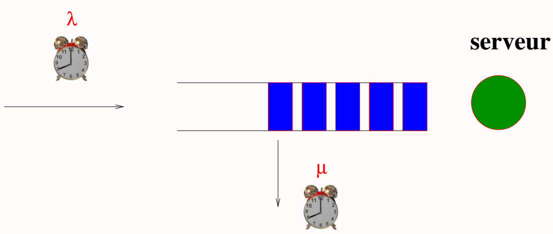
- FIFO : First In First Out
  Ordre des arrivées.
- LIFO : Last In First Out
  Ordre inverse des arrivées.
- PS : Processor Sharing
  Partage : n clients présents $[t, t + h]$,
  chacun d'eux reçoit le service h/n.

$(L_D(t))$ nombre de clients pour la discipline
$D \in \{F, L, P\}$.

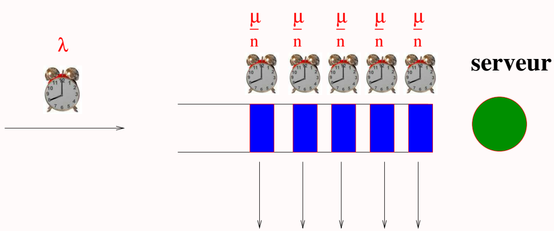
File M/M/1 FIFO



File M/M/1 LIFO



File M/M/1 Partage égalitaire (Processor–Sharing)



Matrice de sauts : $Q_D=(q_D(x,y))\ \ D\in\{F,L,P\}$

$$\text{FIFO}\begin{cases} q_F(x,x+1)=\lambda, \\ q_F(x,x-1)=\mu, \quad x>0 \end{cases}$$

$$\text{LIFO}\begin{cases} q_L(x,x+1)=\lambda, \\ q_L(x,x-1)=\mu, \quad x>0 \end{cases}$$

$$\text{PS :}\begin{cases} q_P(x,x+1)=\lambda, \\ \\ q_P(x,x-1)=\dfrac{\mu}{x}\times x=\mu, \quad x>0 \end{cases}$$

Un paradoxe ?

Les processus $(L_D(t), t \geq 0)$, $D \in \{F, L, P\}$ ont même matrice de sauts.

Si $L_F(0) = L_L(0) = L_P(0) = 1$,

Unicité $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}(L_F(t), t \geq 0) &\stackrel{\text{dist.}}{=} (L_L(t), t \geq 0)\\ &\stackrel{\text{dist.}}{=} (L_P(t), t \geq 0).\end{aligned}$$

Conséquences

Pour $D \in \{F, L, P\}$

$$T_D = \inf\{s \geq 0 : L_D(s) \geq C\},$$

$$\Rightarrow T_F \stackrel{\text{dist.}}{=} T_L \stackrel{\text{dist.}}{=} T_P.$$

La discipline de service n'a pas d'impact ?

Le point de vue des clients

S_x : temps de séjour d'un client de service x. $W_x = S_x - x$. Si $\lambda < \mu$, à l'équilibre

FIFO : $\mathbb{E}\left(W_x^F\right) = \lambda/\mu(\mu - \lambda)$

LIFO : $\mathbb{E}\left(W_x^L\right) = \lambda x/(\mu - \lambda)$

PS : $\mathbb{E}\left(W_x^P\right) = \lambda x/(\mu - \lambda)$

$$\mathbb{E}\left[\left(W_x^L\right)^2\right] \neq \mathbb{E}\left[\left(W_x^P\right)^2\right].$$

2. Markov fort

Temps d'arrêt

(Poly. page 171)

$\mathcal{F}_t$: tous les événements avant l'instant t.

$$\mathcal{F}_t = \langle X(s), s \leq t \rangle$$

Variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ temps d'arrêt si

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t \geq 0.$$

Temps d'arrêt : Exemples

- Temps d'atteinte :

$$T_a = \inf\{s \geq 0 : X(s) = a\}$$

- Si $F \subset \mathcal{S}$,

$$H_a = \inf\{s \geq 0 : X(s) = a, \exists u \leq s,\ X(u) \in F\}$$

- t_n : instant du n-ième saut de $(X(t))$.

La propriété de Markov fort

Markov : Si pour tout $s \geq 0$

$$[X(s+t) \,|\, X(u), u \leq t, X(t) = x] \stackrel{\text{dist.}}{=} [X(s) \,|\, X(0) = x]$$

Markov fort : Si pour tout temps d'arrêt τ,

$$[X(s+\tau) \,|\, X(u), u \leq \tau < +\infty, X(\tau) = x] \stackrel{\text{dist.}}{=} [X(s) \,|\, X(0) = x]$$

(Poly. page 171)

Un processus de sauts non-explosif a la propriété de Markov fort.

Exemple : la file $M/M/1$ FIFO

Période d'occupation :

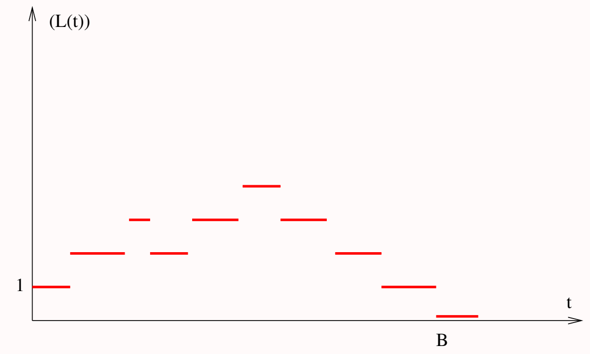
$$B = \inf\{s \geq 0 : L(s) = 0\}$$

Temps de Descente

$$T = \inf\{s \geq 0 : L(s) = L(0) - 1\}$$

si $L(0) > 0$ et $T = 0$ sinon.

B et T sont des temps d'arrêt.



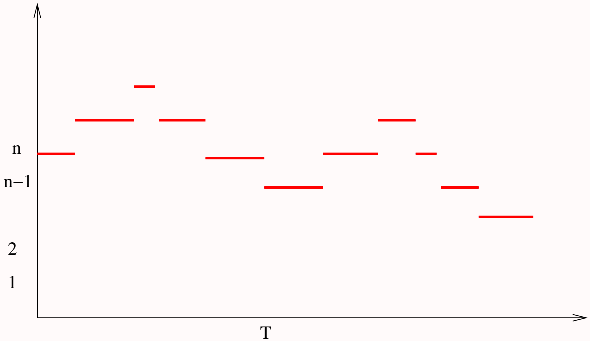
Markov fort $(L(t))$ appliqué à T

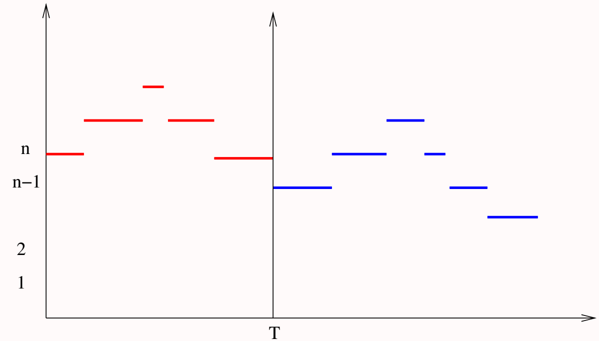
si $L(0) = n \Rightarrow L(T) \equiv n - 1$.

$$\begin{aligned}[(L(t+T), t \geq 0) \mid \mathcal{F}_T, T < +\infty] &\stackrel{\text{dist.}}{=} [(L(t), t \geq 0) \mid L(T)] \\ &\stackrel{\text{dist.}}{=} [(L(t), t \geq 0) \mid L(0) = n - 1]\end{aligned}$$

Le processus après T, $(L(t+T), t \geq 0)$

- indépendant de $\mathcal{F}_T$;
- même loi que processus partant de $n - 1$.





http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Période d'occupation

Si $L(0) = n$ **et** $B_n = \inf\{s \geq 0 : L(s) = 0\}$

$$B_n \stackrel{\text{dist.}}{=} \sum_{i=1}^{n} T_i,$$

où (T_i) **i.i.d. de même loi que** T**.**

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

3. Équations d'Équilibre

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

La file $M/M/1$

Équations de Kolmogorov

Pour $x,\ y \in \mathbb{N}$,

$$p^t(y,x) = \mathbb{P}_y(L(t) = x),$$

$$\frac{d}{dt}p^t(y,x) = \lambda p^t(y,x-1) + \mu p^t(y,x+1) - p^t(y,x)(\lambda+\mu).$$

La file $M/M/1$

Si convergence vers l'équilibre quand $t \to +\infty$

– $\frac{d}{dt}p^t(y,x) \to 0$ Stabilisation.

– $p^t(y,x) \longrightarrow \pi(x)$
«Oubli» de la position initiale y.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Équations d'équilibre de $M/M/1$

Si $x > 0$

$$0 = \lambda\pi(x-1) + \mu\pi(x+1) - (\lambda+\mu)\pi(x),$$

$$0 = \pi(1)\mu - \pi(0)\lambda.$$

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cas général

Pour $x,\ y \in \mathcal{S}$ $p^t(y,x) = \mathbb{P}_y(X(t) = x)$,

$$\frac{d}{dt}p^t(y,x) = \sum_{z\in\mathcal{S}} p^t(y,z)q(z,x)$$

$$\frac{d}{dt}p^t(y,x) = \sum_{z\neq x} p^t(y,z)q(z,x) - p^t(y,x)\left(\sum_{z\neq x} q(x,z)\right)$$

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Équations d'équilibre

(Poly. page 183)

$$\sum_{z\in\mathcal{S}} \pi(z)q(z,x) = 0$$

$$\sum_{z\neq x} \pi(z)q(z,x) = \pi(x)\left(\sum_{z\neq x} q(x,z)\right)$$

Probabilité invariante

Une probabilité π sur $\mathcal{S}$ vérifie les équations de mesure invariante si

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} \pi(y)q(y,x) = 0, \forall x \in \mathcal{S}$$

Équation de balance globale :

$$\underbrace{\pi(x)\left(\sum_{y\neq x} q(x,y)\right)}_{x\,\longrightarrow} = \underbrace{\sum_{y\neq x} \pi(y)q(y,x)}_{\longrightarrow\, x}$$

π est dite probabilité invariante.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Rappel

$$\sum_{z\in\mathcal{S}} q(x,z) = \sum_{z\neq x} q(x,z) - \sum_{z\neq x} q(x,z) = 0$$

$$Q\cdot 1 = 0.$$

1 vecteur propre à droite pour la valeur propre 0.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Formulation matricielle

L'équation de mesure invariante

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} \pi(y)q(y,x) = 0, \forall x \in \mathcal{S}$$

équivalente à

$$\pi\cdot Q = 0$$

π est vecteur propre à gauche pour la valeur propre 0.

N'existe pas forcément !

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Notation

Notation markovienne : si $x \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{P}_x(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{P}(A \mid X(0) = x)$$

Extension : si π proba sur $\mathcal{S}$

$$\mathbb{P}_\pi(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi(x)\mathbb{P}_x(A)$$
$$= \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi(x)\mathbb{P}(A \mid X(0) = x)$$

Extension similaire pour $\mathbb{E}_\pi$.

Invariance temporelle

(Poly. page 184)

Si π est une probabilité invariante alors $\forall x \in \mathcal{S}$:

$$\mathbb{P}_\pi(X(t) = x) = \pi(x), \qquad \forall t \geq 0.$$

Preuve

Équations de Kolmogorov :

Pour $x,\ y \in \mathcal{S}$, $p^t(y, x) = \mathbb{P}_y(X(t) = x)$,

$$\frac{d}{dt}p^t(y, x) = \sum_{z \in \mathcal{S}} q(y, z)p^t(z, x)$$

$$p_\pi^t(x) = \mathbb{P}_\pi(X(t) = x) = \sum_{y \in \mathcal{S}} \pi(y)p^t(y, x)$$

$$\frac{d}{dt}p_\pi^t(x) = \sum_{y \in \mathcal{S}} \pi(y)\frac{d}{dt}p^t(y, x)$$

$$\frac{d}{dt}p_\pi^t(x) = \sum_{y \in \mathcal{S}} \pi(y) \sum_{z \in \mathcal{S}} q(y, z)p^t(z, x)$$
$$= \sum_{z \in \mathcal{S}} \sum_{y \in \mathcal{S}} \pi(y)q(y, z)p^t(z, x)$$
$$= 0.$$

$$p_\pi^t(x) = p_\pi^0(x) = \pi(x) \qquad \forall t \geq 0.$$

Processus Stationnaire

Si π est une proba. invariante de $(X(t))$ alors :

$X(0) \stackrel{\text{dist}}{=} \pi$ entraîne :

$$\forall s \geq 0 \qquad X(s) \stackrel{\text{dist.}}{=} X(0) \stackrel{\text{dist.}}{=} \pi.$$

mais aussi :

$$\forall s \geq 0 \qquad (X(s+t), t \geq 0) \stackrel{\text{dist.}}{=} (X(t), t \geq 0).$$

$(X(t))$ processus de Markov stationnaire.

Convergence vers l'équilibre

Théorème (Poly. page 187)

Si $(X(t))$ irréductible non-explosif avec une probabilité invariante π alors $(X(t))$ converge en distribution vers π :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}_x(X(t) = y) = \pi(y).$$

Le processus de sauts est ergodique.

Unicité (Poly. page 188)

Si $(X(t))$ est irréductible, non-explosif il existe au plus une seule probabilité invariante.

Espace d'états fini

Si $(X(t))$ irréductible sur espace d'états fini, existence d'une unique probabilité invariante.

Exemples

Processus alterné

$$q(0,1) = \lambda \qquad q(1,0) = \mu.$$

Équations :

$$\pi(0)\lambda = \pi(1)\mu.$$

Solution :

$$\pi(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \pi(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Exemples

File $M/M/1$

$$q(x,x+1) = \lambda \qquad q(x,x-1) = \mu, \text{si } x > 0.$$

Équations :

$$\lambda\pi(x-1) + \mu\pi(x+1) = (\lambda+\mu)\pi(x), x > 0$$
$$\mu\pi(1) = \lambda\pi(0),$$

Solution :

$$\pi(x) = \pi(0)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x$$

Équilibre si $\lambda < \mu$

probabilité invariante :
géométrique paramètre λ/μ

$$\pi(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x$$

Exemples

File $M/M/\infty$

$$q(x,x+1) = \lambda \qquad q(x,x-1) = \mu x.$$

Équations :

$$\lambda\pi(x-1) + \mu(x+1)\pi(x+1) = (\lambda+\mu x)\pi(x),$$

Solution :

$$\pi(x) = \pi(0)\frac{1}{x!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x$$

Toujours un équilibre.
probabilité invariante Poisson

$$\pi(x) = \frac{1}{x!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x e^{-\lambda/\mu}$$

Exemples

File $M/M/K$

$$q(x, x+1) = \lambda \qquad q(x, x-1) = \mu(x \wedge K).$$

Équations :

$$\lambda\pi(x-1) + \mu K\pi(x+1) = [\lambda + \mu(x \wedge K)]\pi(x)$$

Solution :

$$\pi(x) = \pi(0)\frac{1}{(x \wedge K)!}\left(\frac{\lambda}{K\mu}\right)^x$$

Équilibre $\Rightarrow \lambda < K\mu$.

Relation entre équilibre de la chaîne de Markov et équilibre du processus de sauts

(Poly. page 185)

Relation

Si π est une probabilité invariante pour Q et

$$\hat{\pi}(x) = q_x\pi(x), \qquad x \in \mathcal{S}$$

$q_x = -q(x, x)$, et

$$Z = \sum_{x \in Z} \hat{\pi}(x) < +\infty$$

$\hat{\pi} = (\hat{\pi}(x)/Z)$ est une probabilité invariante pour la chaîne de Markov (M_n).

Si t_1 premier instant de saut : $\mathbb{E}_x(t_1) = 1/q_x$

$$\pi(x) = \frac{1}{q_x}\hat{\pi}(x) = \mathbb{E}_x(t_1)\hat{\pi}(x)$$

Le coefficient $\mathbb{E}_x(t_1)$ "pondère"
la proba. invariante de la chaîne.

4. Annexe : Équations de Kolmogorov

Les équations de Kolmogorov : Cas général

Pour $x,\ y \in \mathcal{S}$, $p^t(x,y) = \mathbb{P}_x(X(t) = y)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p^t(x,y) &= \sum_{z\neq y} p^t(x,z)q(z,y)\\ &\qquad - \left(\sum_{z\neq y} q(y,z)\right) p^t(x,y)\\ &= \sum_{z} p^t(x,z)q(z,y)\\ &= \sum_{z} q(x,z)p^t(z,y)\end{aligned}$$

Équations de Kolmogorov forward et backward

Si $P(t) = (p^t(x,y), x, y \in \mathcal{S})$,

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\cdot Q = Q\cdot P(t).$$

Intuitivement (pas toujours rigoureux ! !) :

$$P(t) = e^{tQ}P(0);$$

Cohérent avec l'équation de semi-groupe :

$$P^{s+t} = P^s \circ P^t.$$

Chaîne de Markov : analogue $Q = I - P$;
Mouvement Brownien $\Rightarrow Q = \Delta$.

Aspects Fonctionnels

Forme fonctionnelle des équations K

(Poly. page 161)

Définition Si $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ est bornée,
$P(t) : f \to P(t, f)$

$$P(t,f)(x) = \mathbb{E}_x(f(X(t)) = \sum_{z \in \mathcal{S}} f(z)\mathbb{P}_x(X(t) = z).$$

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Si $Q(f)$ est bornée, Équations K :

$$\frac{d}{dt}P(t)(f) = P(t) \circ Q(f) = Q \circ P(t,f),$$

$$P(t)(f) = P(0)(f) + \int_0^t P(s) \circ Q(f)\, ds$$

$$\mathbb{E}_x[f(X(t))] = \mathbb{E}_x[f(X(0))] + \int_0^t \mathbb{E}_x[Q(f)(X(s))]\, ds$$

d'où la forme intégrale :

$$\mathbb{E}_x[f(X(t))] = f(x) + \mathbb{E}_x\left(\int_0^t (Q \cdot f)(X(s))\, ds\right).$$

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Pour tout $t \geq 0$ la variable

$$M(t) = f(X(t)) - f(x) - \int_0^t (Q \cdot f)(X(s))\, ds$$

est de moyenne nulle :

$(M(t))$ est une martingale,

$$f(X(t)) = f(x) + M(t) + \int_0^t (Q \cdot f)(X(s))\, ds$$

"formule d'Itô" des processus avec sauts.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert