Cours n°6

Protocoles d'accès — Critères de stabilité

Mercredi 8 novembre 2006

http ://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Table des matières

http://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

1. Introduction

http://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Le cadre des protocoles d'accès

(Poly. page 3)

– N émetteurs dispersés dans la nature.
Le nombre N est inconnu, variable.
Topologie inconnue

– Un seul canal de communication.

– Une station ayant un message
doit le transmettre sur le canal.

– Deux émissions sur le canal en même temps
$\Rightarrow$ échec.

http://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Le Cadre des Systèmes Distribués

– Ensemble de nœuds indépendants "reliés" en réseau.

– Coordination centralisée impossible

$\Rightarrow$ Pas de file d'attente globale.

Information d'une station/émetteur

Chaque émetteur peut écouter le canal :

0 —un blanc
pas d'essai de transmission sur le canal.

1 —un succès
un seul émetteur transmet sur le canal.

2 —une collision
au moins deux émetteurs essaient une transmission.

Le canal délivre une information ternaire

Exemples

– Réseaux sans fil (Wifi, Bluetooth. . .).

– Réseaux locaux.

– Réseau câblé ("Internet sur le câble").

– Réseau GSM (Accès sur canal de contrôle).

Politique de transmission

– Basée uniquement sur l'écoute du canal.

– Un émetteur ayant un message :
Tentative de transmission ou non.

– Tous les émetteurs utilisent la même politique.

Simplifications pour l'étude

– Temps discrétisé.

– Décision de tentative de transmission : au début d'une unité de temps.

– Durée de transmission d'un message = une unité de temps.

Algorithme de transmission

Station essayant depuis n unités de temps :
Si $O_1, \ldots, O_n$, l'état du canal vu par celle-ci

$$1 \leq i \leq n, \qquad O_i \in \{0, 1, 2\}.$$

Décision à $t = n + 1$: $f_n : \{0, 1, 2\}^n \to \{0, 1\}$

Problématique

Trouver une politique $\mathcal{P}$ telle que :

– Admissibilité.
N messages à transmettre :
chaque émetteur transmet avec succès.

– Équité. Pas d'émetteur privilégié.

Hypothèses Statistiques

– Nombre de stations N très grand.

– Chaque unité de temps, avec probabilité λ/N, une station inactive a un message à transmettre.

Au niveau du réseau : en moyenne

$\sim \lambda$ nouveaux messages par unité de temps.

Propriété de robustesse

– Stabilité de $\mathcal{P}$ avec un flux de messages si :

$L(t)$: nb d'émetteurs en attente à t
A_t : nb de nouveaux messages à t, (A_t) i.i.d.

Existence de $\lambda_c(\mathcal{P}) > 0$ tel que si $\lambda < \lambda_c(\mathcal{P})$

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(L(t)) < +\infty.$$

Débit maximal du canal : $\lambda_{\text{max}} = \max_{\mathcal{P}} \lambda_c(\mathcal{P})$
Remarque : $\lambda_{\text{max}} \leq 1$.

2. Aloha

Aloha

Contexte historique (~ 1967) (Poly. page 7)

– Terminaux sur des îles reliés
au serveur central de l'Université d'Hawaï.

– Connexion radio sur une seule fréquence.

L'algorithme

Abramson (1967)
Au début de chaque unité de temps :

Chaque émetteur lance une pièce de monnaie de biais p

– Résultat Pile.
Tentative de transmission.

– Si Face.
Pas de tentative de transmission.

Caractéristiques

- Admissible.
- Algorithme probabiliste.
  L'aléatoire réduit les collisions répétées.

Les Algorithmes probabilistes

1. Optimisation : recuit simulé ;
2. Recherche dans espaces d'états complexes ;
3. Routage ;
4. Tests de primalité, géométrie algorithmique, maillages... Nombreuses applications.

Modèle probabiliste

Le cadre

- n-ième unité de temps :
  A_n nouvelles demandes de transmission.
- (A_n) i.i.d. de moyenne λ.
- L_n : nombre de stations en attente
  à la fin de la n-ième unité de temps.

Évolution temporelle

Relation de récurrence :

$$L_{n+1} = L_n + A_n - 1_{\{B_1^n + B_2^n + \cdots + B_{L_n}^n = 1\}}$$

B_i^n v.a. de Bernoulli : “pièce de monnaie” de la i-ième station en attente à l'instant n,

$$\mathbb{P}(B_i^n = 1) = p.$$

$(B_i^n, i \geq 0)$ i.i.d. et indépendante de L_n.

Propriétés de (L_n)

Si $\mathbb{P}(A_1 > 0) > 0$ et $\mathbb{P}(A_1 = 0) > 0$

$\Rightarrow$ (L_n) chaîne Markov irréductible apériodique.

Traduction markovienne de la stabilité

– Ergodique : Pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(L_n = x) = \pi(x) > 0.$$

– Transiente : $\mathbb{P}$-p.s. $L_n \to +\infty$.

Stabilité du protocole = Ergodicité de (L_n).
Instabilité = Transience

Étude de la stabilité

Paramètre de contrôle : $\lambda = \mathbb{E}(A_1)$.

Existence de $\lambda_c > 0$ tel que $\lambda < \lambda_c$

$\Rightarrow$ (L_n) ergodique ?

Étude de la stabilité

Sur une unité de temps :

$$L_{n+1} = L_n + A_n - 1_{\{B_1^n + B_2^n + \cdots + B_{L_n}^n = 1\}}$$

Bilan :

$$\mathbb{E}(L_{n+1} - L_n | L_n = x) = \lambda - xp(1-p)^{x-1},$$
$$\lim_{x \to +\infty} \mathbb{E}(L_{n+1} - L_n | L_n = x) = \lambda > 0.$$

Si L_n assez grand alors L_{n+1} croît en moyenne.

Conjecture : (L_n) est transiente $\forall \lambda > 0$.

3. Critère d'instabilité

Cadre général

Notations : (Poly. page 113)

(M_n) chaîne de Markov
– matrice transition $(p(x,y))$;

– irréductible ;

– apériodique ;

Si F sous-ensemble fini de $\mathcal{S}$,

$$T_F = \inf\{n \geq 0 : M_n \in F\}.$$

Transience

Il y a équivalence entre

– (M_n) est transiente.

– $\mathbb{P}_x(T_F = +\infty) > 0$ pour un $x \in \mathcal{S}$.

– $\mathbb{P}_x$-p.s. "la suite (M_n) tend vers $+\infty$" : (M_n) visite un nb fini de fois tout ensemble fini.

Divergence à l'infini : formalisation

Fonction de niveau $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$

1. $\sup(f(x) : x \in F) < +\infty$, $\forall F$ fini $\subset \mathcal{S}$.
2. $\sup(f(x) : x \in \mathcal{S}) = +\infty$;

– $\mathcal{S} = \mathbb{N}^d$, $f(x) = \sup(x_i : 1 \leq i \leq d)$

Transience d'une chaîne de Markov (M_n)

Si f fn de niveau et $(x_n) \in \mathcal{S}$, alors si

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$$

$\Rightarrow$ (x_n) ne visite qu'un nb fini de fois tout ensemble fini.

Conclusion : (M_n) transiente s'il existe une fonction de niveau telle que $\mathbb{P}$-p.s.

$$\lim_{n \to +\infty} f(M_n) = +\infty.$$

Critère de transience

Théorème (Lamperti, 1960)(Poly. page 120)

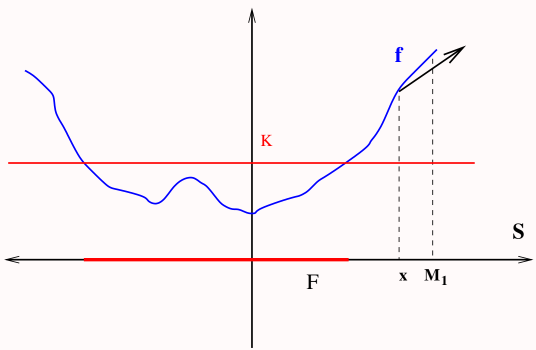
S'il existe une fn f, K et $\gamma > 0$ tels que

a) $\mathbb{E}_x(f(M_1) - f(x)) \geq \gamma$ si $f(x) \geq K$,

b) $\sup_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_x\left(|f(M_1) - f(x)|^2\right) < +\infty$,

alors $\mathbb{P}$-p.s $f(M_n) \to +\infty$.

La chaîne de Markov (M_n) est transiente.
f est une fonction de Liapounov pour (M_n)



4. Application à Aloha

Aloha

$\exists x_0$ tel que si $x \geq x_0$,

$$\mathbb{E}(L_{n+1} - L_n | L_n = x) \geq \frac{\lambda}{2}$$

si $\mathbb{E}(A_1^2) < +\infty$

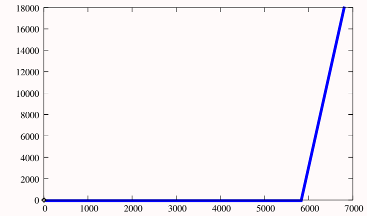
$$\mathbb{E}\left(L_{n+1} - L_n\right)^2 < +\infty$$

$\Rightarrow$ La chaîne de Markov (L_n) est transiente.

L'algorithme ALOHA est toujours instable.

L'instabilité d'Aloha

- La condition $\mathbb{E}(A_1^2) < +\infty$ pas nécessaire.
- $\mathbb{P}$-p.s. $\exists n_0$: aucun message n'est transmis après n_0.



Aloha λ=0.2

5. Critère de stabilité

Notations

(M_n) chaîne de Markov (Poly. page 113)

- matrice transition $(p(x, y))$;

  irréductible ;

  apériodique.

Pour $x \in \mathcal{S}$,

$$T_x^+ = \inf\{n > 0 : M_n = x\}$$

Ergodicité d'une chaîne de Markov

Proposition (Poly. page 107)

– Pour un $x_0 \in \mathcal{S}$, $\mathbb{E}_{x_0}\left(T^+_{x_0}\right) < +\infty$.

$\Updownarrow$

– $\exists$ proba. invariante $\pi = (\pi(x))$,

$$\pi(x) = \sum_y \pi(y) p(y,x), \qquad \forall x \in \mathcal{S}$$

(M_n) est ergodique (ou récurrente positive).

Dans ce cas $(M_n) \xrightarrow{\text{dist.}} \pi$

Critère d'ergodicité

Théorème (Foster) (Poly. page 117)

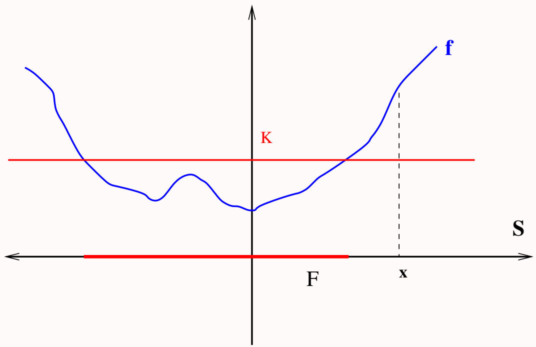
S'il existe fn f et K, $\gamma > 0$ tels que

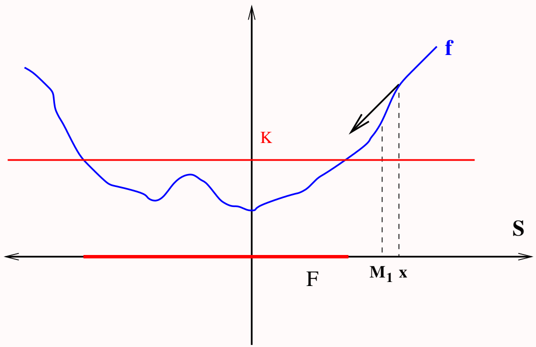
a) $\mathbb{E}_x(f(M_1) - f(x)) \leq -\gamma$ si $f(x) \geq K$,

b) $\mathbb{E}_x\left(f(M_1)\right) < +\infty$ si $f(x) \leq K$,

alors la chaîne de Markov (M_n) est ergodique.

f est une fonction de Liapounov pour (M_n)





Exemple : Aloha contrôlé

Si x émetteurs en attente : proba d'essai α/x, $\alpha > 0$

$$\widetilde{L}_{n+1} = \widetilde{L}_n + A_n - 1_{\{B_1^n + B_2^n + \cdots + B_{\widetilde{L}_n}^n = 1\}}$$

avec $\mathbb{P}(B_i^n = 1 \mid \widetilde{L}_n = x) = p_x = \alpha/x$.

Aloha contrôlé

$$\mathbb{E}(\widetilde{L}_{n+1} - \widetilde{L}_n | \widetilde{L}_n = x) = \lambda - x p_x (1 - p_x)^{x-1}$$
$$= \lambda - \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)^{x-1} \sim \lambda - \alpha e^{-\alpha}$$

Si $\lambda < \alpha e^{-\alpha}$, $\exists x_0 \geq 0$ et $\gamma > 0$, t.q. si $x \geq x_0$

$$\mathbb{E}(\widetilde{L}_{n+1} - \widetilde{L}_n \mid L_n = x) \leq -\gamma$$

$$\mathbb{E}(\widetilde{L}_1 \mid \widetilde{L}_0 \leq x_0) \leq x_0 + \mathbb{E}(A_0) < +\infty$$

Aloha contrôlé (II)

Si $\alpha = 1$ et $\lambda < e^{-1} \sim 0.367$,
alors la chaîne de Markov $(\widetilde{L}_n)$ est ergodique.

Un algorithme d'accès avec un débit de 0.367 ?

Aloha Contrôlé : x émetteurs en attente, proba d'essai α/x, $\alpha > 0$.

Aloha Contrôlé pas un algorithme distribué : nb x a priori inconnu.

Aloha algorithme instable.

Aloha en pratique

– Accès au réseau GSM.

– Réseaux satellitaires.

– Utilisation marginale.

– Généralisation : Ethernet.

6. Stabilité/Instabilité Exemple

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

La file $M/G/1$

(Poly. page 125)

– Arrivées $(\mathcal{N}_\lambda(t)) = (t_n)$ Poisson λ.

– Services généraux (σ_n) — $\sigma(dx)$ loi de σ_1.

– Discipline FIFO.

---

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

La file $M/G/1$ (II)

T_n : instant de départ du n-ième client,

L_n : nb de clients à $t = T_n$.

Si $L_{n-1} > 0$

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + \sigma_n, \\ L_n &= L_{n-1} + \mathcal{N}_\lambda([T_n, T_n + \sigma_n[) - 1, \end{aligned}$$

Si $L_{n-1} = 0$

$$\begin{aligned} T_n &= t_n \\ L_n &= \mathcal{N}_\lambda([t_n, t_n + \sigma_n[), \end{aligned}$$

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Propriété de Markov de (L_n)

Markov fort de Poisson
+ indépendance des (σ_n) :

– Pour $n \geq 1$: T_n temps d'arrêt.

– si $\sigma_1 \not\equiv 0$
(L_n) chaîne de Markov irréductible sur $\mathbb{N}$

La file $M/G/1$: Ergodicité

Si $L_0 = x > 0$,

$$L_1 = L_0 + \mathcal{N}_\lambda([T_0, T_0 + \sigma_1[) - 1,$$
$$\mathbb{E}(L_1 - L_0 \mid L_0 = x) = \lambda \mathbb{E}(\sigma_1) - 1.$$

Si $\lambda \mathbb{E}(\sigma_1) < 1$ et $x > 0$,

$$\mathbb{E}(L_1 - L_0 | L_n = x) = \lambda \mathbb{E}(\sigma_1) - 1 < 0,$$

$$\mathbb{E}(L_1 | L_0 = 0) \leq \lambda \mathbb{E}(\sigma_1) < +\infty.$$

La file $M/G/1$: Ergodicité

Foster :

$\lambda \mathbb{E}(\sigma_1) < 1 \Rightarrow$ la chaîne (L_n) est ergodique.

La file $M/G/1$: Transience

Si $L_0 = x > 0$,

$$L_1 = L_0 + \mathcal{N}_\lambda([T_0, T_0 + \sigma_1[) - 1,$$
$$\mathbb{E}(L_1 - L_0 \mid L_0 = x) = \lambda \mathbb{E}(\sigma_1) - 1.$$

Si $\lambda \mathbb{E}(\sigma_1) > 1$, $\mathbb{E}(\sigma_1^2) < +\infty$ et $x > 0$,

---

$$\mathbb{E}(L_1 - L_0 | L_n = x) = \lambda \mathbb{E}(\sigma_1) - 1 > 0,$$

$$\mathbb{E}((L_1 - L_0)^2 | L_0 = x) \leq \lambda \mathbb{E}(\sigma_1) + \lambda^2 \mathbb{E}(\sigma_1^2) < +\infty.$$

La file $M/G/1$: Transience

Lamperti :

$\boldsymbol{\lambda}\mathbb{E}(\boldsymbol{\sigma}_1) > 1$ et $\mathbb{E}(\boldsymbol{\sigma}_1^2) < +\infty$
$\Rightarrow$ la chaîne (L_n) est transiente.

Condition $\mathbb{E}(\boldsymbol{\sigma}_1^2) < +\infty$ pas nécessaire.