Cours n°7

Protocoles d'accès (II)

Mercredi 15 novembre 2006

http ://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Table des matières

1. Rappels

Critère d'ergodicité

Théorème (Foster) (Poly. page 117)

S'il existe fn f et K, $\gamma > 0$ tels que

a) $\mathbb{E}_x(f(M_1) - f(x)) \leq -\gamma$ si $f(x) \geq K$,

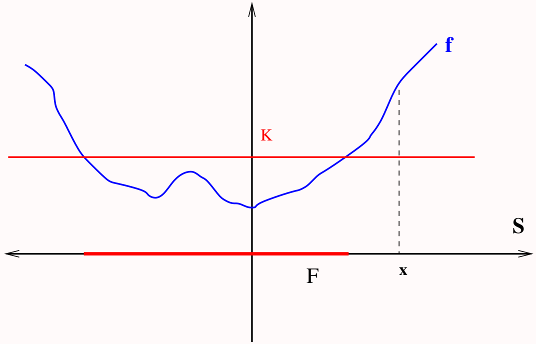
b) $\mathbb{E}_x\left(f(M_1)\right) < +\infty$ si $f(x) \leq K$;

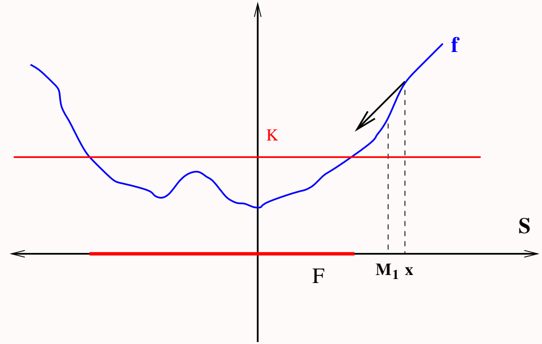
c) $\{x : f(x) \leq K\}$ ensemble fini,

alors la chaîne de Markov (M_n) est ergodique.

---

f est une fonction de Liapounov pour (M_n)





Critère de transience

Théorème (Lamperti, 1960)(Poly. page 120)

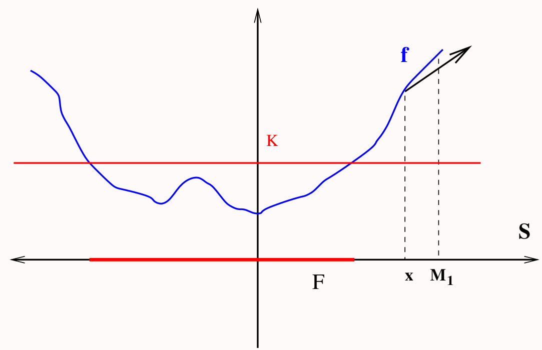
S'il existe une fonction de niveau f et K, $\gamma > 0$ tels que

a) $\mathbb{E}_x(f(M_1) - f(x)) \geq \gamma$ **si** $f(x) \geq K$,

b) $\sup_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_x \left(|f(M_1) - f(x)|^2\right) < +\infty$,

alors $\mathbb{P}$**-p.s** $f(M_n) \to +\infty$.

La chaîne de Markov (M_n) est transiente.



2. Ethernet

Rappel du cadre

(Poly. page 3)

- N émetteurs dispersés dans la nature.
  Le nombre N est inconnu, variable.
  Topologie inconnue
- Un seul canal de communication.
- Une station ayant un message
  doit le transmettre sur le canal.
- Deux émissions sur le canal en même temps
  $\Rightarrow$ échec.

Rappel du cadre : II

Chaque émetteur peut écouter le canal :

0 —un blanc
pas d'essai de transmission sur le canal.

1 —un succès
un seul émetteur transmet sur le canal.

2 —une collision
au moins deux émetteurs essai ent une transmission.

Le canal délivre une information ternaire

L'algorithme

Metcalf (Harvard) 1973 (Poly. page 7)

Chaque émetteur : variable "compteur" C.

- À l'arrivée sur le canal : $C = 0$;
- Chaque échec de transmission $C \to C + 1$.

L'algorithme (II)

Émetteur avec compteur égal à k :

Lancer d'une pièce de monnaie de biais $1/2^k$

– Pile (proba $1/2^k$) : Tentative de transm.

– Face : Pas de tentative de transmission.

Caractéristiques

Un émetteur ayant subi k échecs
essaie de transmettre avec proba $1/2^k$:

– Prise en compte de l'histoire du canal avec la variable C.

– Privilégie les nouveaux messages.

– Diminue la proba de collisions répétées.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Modèle probabiliste

Le cadre

– n ième unité de temps :
A_n nouvelles demandes de transmission.

– (A_n) i.i.d. Poisson de paramètre λ.

Espace d'états pour modèle markovien ?

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Modèle markovien

Espace d'états :

$\mathcal{S}$: espace des suites finies à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$x \in \mathcal{S}$, $x = (x_0, \dots, x_p, 0, 0, \dots) = (x_0, \dots, x_p)$,

x_k : nb de stations avec compteur égal à k ;

chacune des x_k stations : proba $1/2^k$ de transm.

$x_0 + \cdots + x_p$: nb total de stations en attente.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Modèle markovien : transitions

Si $X(0) = x$, $x = (x_0, \ldots, x_p)$,

$(B_i^k, i \geq 1)$ Bernoulli paramètre $1/2^k$,

$$Y_k = \sum_{i=1}^{x_k} B_i^k,$$

Y_k :nb de stations compteur k : essai transm.

$$Z_k = x_k - \sum_{i=1}^{x_k} B_i^k,$$

Z_k : nb de stations compteur k : pas d'essai

Modèle markovien : transitions

Si $X(0) = x$ et si collision

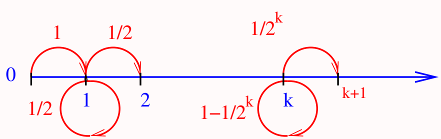
$$X(1) = (A_1, Y_0, Y_1 + Z_2, \\ Y_2 + Z_2, \ldots, Y_{p-1} + Z_p, Y_p)$$

$(X(n))$ chaîne de Markov irréductible sur $\mathcal{S}$.

Une chaîne de Markov $(b(n))$ sur $\mathbb{N}$ associée

Transitions : $b(0) = 0$ et (Poly. page 14)

- $\mathbb{P}(b(n) = k + 1 \mid b(n-1) = k) = \dfrac{1}{2^k}$
- $\mathbb{P}(b(n) = k \mid b(n-1) = k) = 1 - \dfrac{1}{2^k}$



Modèle du canal encombré

- Hypothèse : aucune transmission réussie.
- État : $Y(n) = (y_1(0), y_1(n), \ldots, y_k(n), \ldots)$ avec état initial $Y(0) = (0)$.

Modèle du canal encombré (II)

Proposition (Poly. page 15)

Pour $n \geq 1$, $y_k(n)$, $k \geq 1$ sont indépendantes ; $y_k(n)$: Poisson de paramètre

$$\lambda \sum_{s=0}^{n} \mathbb{P}(b(s) = k).$$

Le nombre d'essais $Z(n)$ de transmission à $t = n$ suit une loi de Poisson de paramètre

$$\nu_n = \lambda \mathbb{E}(b(n+1)).$$

Instabilité d'Ethernet

Proposition (Poly. page 16)

Si $\lambda > \log 2 \sim 0.693$ alors la chaîne de Markov $(X(n))$ est transiente et $\mathbb{P}$-p.s. seul un nb fini de messages sont transmis.

Instabilité d'Ethernet (II)

Preuve : $\nu_n = \lambda \mathbb{E}(b(n+1)) \sim \lambda \log n / \log 2$

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z(n) = 1) = \sum_{n \geq 1} \nu_n e^{-\nu_n} \sim \frac{\lambda}{\log 2} \sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^{\lambda/\log 2}}$$

Si $\lambda > \log 2$, alors

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 1} 1_{\{Z(n)=1\}}\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z(n) = 1) < +\infty$$

$\mathbb{P}$-p.s. un n.b. fini transmissions $\Rightarrow$ transience.

Instabilité d'Ethernet (III)

Théorème, Aldous (1987)

Si $\lambda > 0$, $\Rightarrow$ la chaîne $(X(n))$ est transiente.

si $\lambda < \log 2$,

$\mathbb{P}$-p.s. un nombre infini de messages transmis.

Conclusions

- Algorithme instable.
- Instabilité théorique.
- Instabilité en pratique.
- Protocole ouvert (Xerox PARC).
- Succès industriel. Norme IEEE 802.3.

3. L'algorithme en arbre

1979

Capetanakis (MIT)

Tsybakov et Mikhailov (Moscou)

L'algorithme

(Poly. page 20)

Émetteur : une variable “compteur” C.

- Si $C = 0$: essai de transmission.

  1. Succès : terminé.
  2. Collision : tirage pile ou face :
     si pile, $C = 0$, sinon, $C = 1$.

L'algorithme (II)

– **Si $C > 0$, pas d'essai de transmission.**

Écoute du canal :

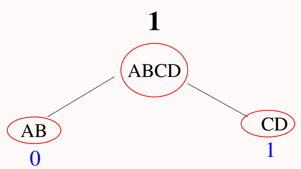
1. **Si succès ou pas d'essai de transmission,** $C \to C - 1$.

2. **Si collision sur le canal,** $C \to C + 1$.

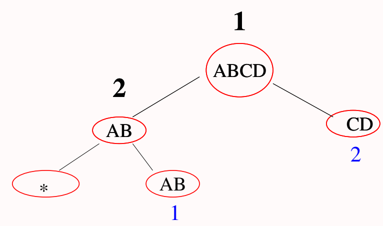
Exemple

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	No	No	∅	No	Ok	Ok	No	Ok	Ok
0	ABCD	AB		AB	A	B	CD	C	D
1		CD	AB	CD	B	CD		D	
2			CD		CD				

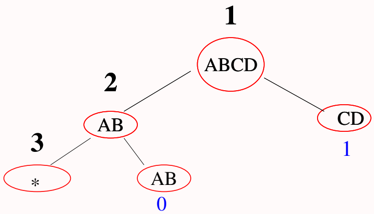
http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

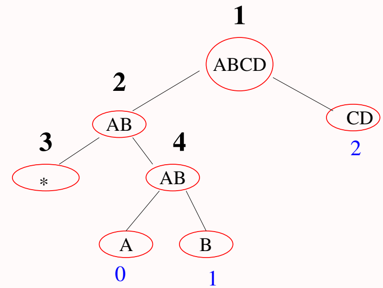


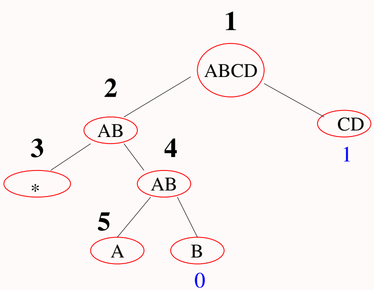
http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

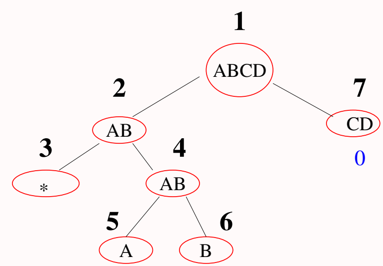


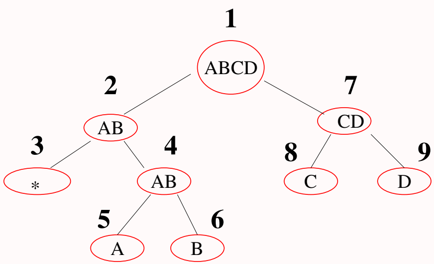
http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert


1
ABCD
2
AB
CD
1
3
*
AB
0


1
ABCD
2
AB
CD
2
3
*
4
AB
A
0
B
1


1
ABCD
2
AB
CD
1
3
*
4
AB
5
A
B
0


1
ABCD
2
AB
7
CD
0
3
*
4
AB
5
A
6
B



Caractéristiques

- Écoute continue du canal.
- Prise en compte de l'information ternaire même en cas de non-transmission.

Modèle probabiliste

- Arrivées Poisson paramètre λ.
- $X(n) = (x_0(n), x_1(n), \ldots)$.
  $x_k(n)$: nb stations compteur k à $t = n$.

Exemple

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	No	No	∅	No	Ok	Ok	No	Ok	Ok
0	ABCD	AB		AB	A	B	CD	C	D
1		CD	AB	CD	B	CD		D	
2			CD		CD				

1	2	3	4	5	6	7	8	9
(4)	$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	(2)	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	(1)

Le protocole à arrivées bloquées

Un modèle simplifié

– Découpage en sessions.
– Messages arrivés pendant la n-ième session
$\Rightarrow$ transmis dans la $(n+1)$-ième.

R_n durée d'une session
débutant avec n stations.

Relation de récurrence

$R_0 = R_1 = 1$. Pour $n \geq 2$,

$$R_n \stackrel{\text{dist}}{=} 1 + R_{X_n} + \overline{R}_{n-X_n}$$

avec

$$X_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n.$$

(B_i) i.i.d. Bernoulli paramètre $1/2$.

Suite $(\overline{R}_n)$ même loi que (R_n)
$(\overline{R}_n)$ indépendante de (R_n)

Transformée de Poisson

Si $r_n = \mathbb{E}(R_n)$ (Poly. page 23)

$$r(x) = \sum_{n \geq 0} r_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} = \mathbb{E}(r_{N[0,x]}) = \mathbb{E}(R_{N[0,x]})$$

$(N[0,t], t \geq 0)$ Proc. Poisson intensité 1
indépendant de (R_n).

Relation de récurrence (II)

$R_0 = R_1 = 1$

Si $n \geq 0$ et $Y_n = n - X_n$,

$$R_n \stackrel{\text{dist}}{=} 1 + R_{X_n} + \overline{R}_{Y_n} - 2_{\{n \leq 1\}}$$

$$R_{N[0,x]} \stackrel{\text{dist}}{=} 1 + R_{X_{N[0,x]}} + \overline{R}_{Y_{N[0,x]}} - 2_{\{N[0,x] \leq 1\}}$$

Effacement d'un Poisson :
$X_{N[0,x]}$ et $Y_{N[0,x]}$ indép. Poisson param. $x/2$.

$$r(x) = 2r(x/2) + 1 - 2(1+x)e^{-x}$$

Transformée de Poisson (II)

Par itération

$$r(x) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(R_n)\frac{x^n}{n!}\, e^{-x}$$
$$= 1 + \sum_{k\geq 0} 2^{k+1}\left(1 - \left(1+\frac{x}{2^k}\right) e^{-x/2^k}\right)$$

En identifiant $\Rightarrow \mathbb{E}(R_n)$.

Débit asymptotique

$\mathbb{E}(R_n)/n$: Temps moyen transm. 1 message.

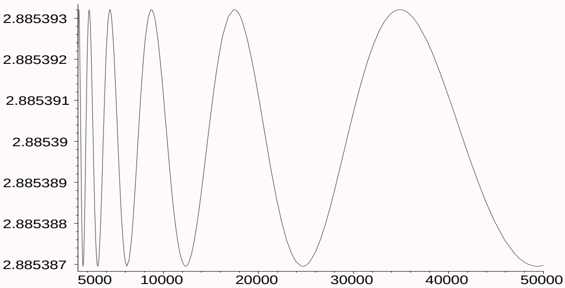
Débit : $\lambda_c \neq \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathbb{E}(R_n)}$

– Pb : la limite n'existe pas !

– $(n/\mathbb{E}(R_n))$ oscille autour de
$\log 2/2 \sim 0.3465735903$

– Mais $\liminf_{n\to+\infty} n/\mathbb{E}(R_n) \sim 0.34657 > 0.$

Évolution de $n \to \mathbb{E}(R_n)/n$



Stabilité du protocole en arbre

Théorème (Poly. page 27)

Si $\lambda < 0.34657$ alors le protocole en arbre à arrivées bloquées est stable.

Théorème

Si $\lambda < 0.36017$ alors le protocole en arbre à arrivées libres est stable.

Améliorations

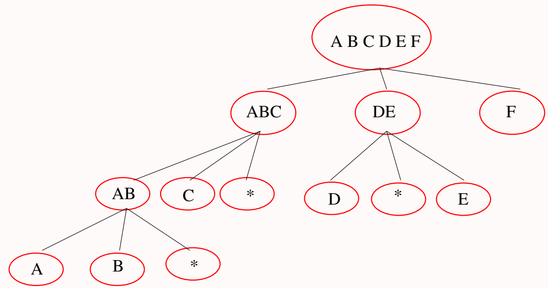
Arbre d-aire

– Séparation en d groupes.
– d grand : Séparation plus rapide.
– d grand : Beaucoup de silences.

Valeur optimale $d = 3$

Si $\lambda < 0.40159$ alors
le protocole en arbre ternaire est stable.

Protocole en arbre ternaire



http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Bornes théoriques

Protocole hybride basé sur l'arbre ternaire

$\exists$ protocole stable dès que $\lambda < 0.487$.

$$\Rightarrow \lambda_{\text{max}} \geq 0.487$$

Débit maximal : $\lambda_{\text{max}} \leq 0.56$.

Conjecture : $\lambda_{\text{max}} \leq 0.52$

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Bornes théoriques (II)

Protocole en arbre :

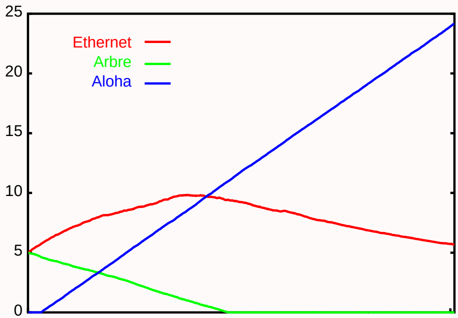
Utilisation quasi-optimale

de l'information ternaire donnée par le canal.

Faible impact industriel.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert



4. Algorithmes & Structures de données

Élection de leader

Contexte :

– N stations dispersées, pouvant tomber en panne ;

– Canal communication commun ;

Problème
– Déterminer de façon distribuée un chef.

Application : Réseaux de capteurs.

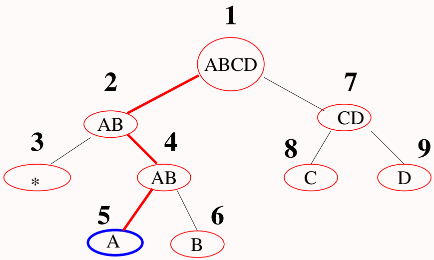
Élection de leader : un algorithme

Chaque élément à un compteur C

Si $C = 0$: émission de son Id ;
– un seul Id sur canal : Fin.
– Collision,

$$C \to \begin{cases} 0 \text{ avec proba } 1/2; \\ 1 \text{ avec proba } 1/2; \end{cases}$$

– Silence. Éléments ayant émis dans l'unité précédente remettent leur compteur à 0.



Problèmes connexes (II)

Arbres binaires de recherche

– N éléments $x_1, \ldots, x_N \in \mathcal{S}$;

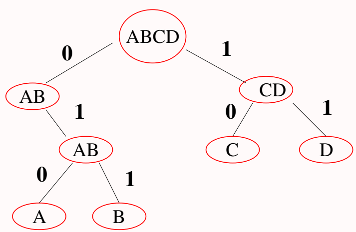
– Pb : si $y \in \mathcal{S}$, déterminer si $y \in \{x_1, \ldots, x_n\}$;

– Nb minimum d'opérations.

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

A=0101 B=0111
C=101 D=11



http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

Classe générale

Algorithmes "Divide and Conquer"

n éléments

– Condition de Terminaison.
If $n < D \longrightarrow$ Stop.

– Structure en arbre.
Si $n \geq D$, division au hasard en 2 groupes de tailles n_1 et n_2, $n_1 + n_2 = n$

$\longrightarrow$ Appliquer $\mathcal{A}(n_1)$ et $\mathcal{A}(n_2)$.

Algorithmes de recherche, de tri,...

http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours de Majeure 2006 École Polytechnique Philippe Robert

5. Protocoles à jeton

L'algorithme

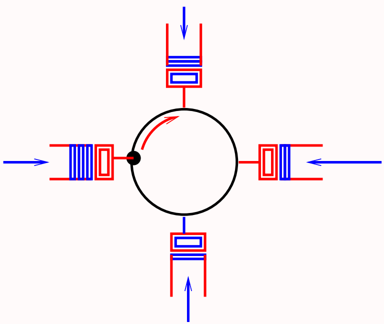
Cadre (Poly. page 32)

– Stations situées sur un anneau.

– Jeton circule sur l'anneau dans un seul sens.

– Jeton capté par une station
$\Rightarrow$ émission de la station.

– Pas d'émission sans jeton.



Histoire

– Cambridge ring (1974).

– IBM (1980). Token Ring.

– Normes industrielles IEEE 802.4 et 802.5.

L'algorithmique

Caractéristiques

– Hypothèse sur la topologie.

– Fragilité/Complexité due au jeton.

Modèles mathématiques

– Réseaux avec polling.

Stabilité

Théorème (Poly. page 36)

Temps de propagation négligeables :
$\lambda < 1 \Rightarrow$ stabilité du réseau.

Topologie en anneau
$\Rightarrow$ débit maximum optimal.

Évolution :

Le protocole tend à disparaître.

6. Preuve du critère de Foster

Une idée de la preuve : La formule du cycle

(M_n) chaîne de Markov ergodique
de proba invariante π, $x_0 \in \mathcal{S}$,

$$T_{x_0} = \inf\{n > 0 : M_n = x_0\},$$

alors $\mathbb{E}_{x_0}(T_{x_0}) < +\infty$

et, (Poly. page 106)

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi(x) f(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_{x_0}(T_{x_0})} \mathbb{E}_{x_0}\left(\sum_{k=0}^{T_{x_0}-1} f(M_k)\right).$$

Une extension

F ensemble fini

$$T_F = \inf\{n > 0 : M_n \in F\}.$$

(M_n) chaîne de Markov irréductible
proba invariante π alors

$$\mathbb{E}_x(T_F) < +\infty$$

est vérifié pour tout $x \in \mathcal{S}$.

Une extension

(X_n) suite des points de F visités par (M_n).

$$\{X_p, p \geq 0\} = \{M_n : M_n \in F\}.$$

(X_n) chaîne de Markov finie irréductible

$\Rightarrow$ proba invariante π_F.

Une extension

Alors π est donnée par (Poly. page 106)

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} \pi(x) f(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\pi_F}(T_F)} \mathbb{E}_{\pi_F}\left(\sum_{k=0}^{T_F-1} f(M_k)\right)$$

Formule du cycle généralisée

Une extension

Réciproquement :

Si $\mathbb{E}_x(T_F) < +\infty$ pour tout $x \in \mathcal{S}$,
π définie par la formule du cycle généralisée
est invariante pour (M_n).

Une extension

Théorème 5.5 (Poly. page 117)

S'il existe une fonction $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$
et K, $\gamma > 0$ tels que

a) $\mathbb{E}_x(f(M_1) - f(x)) \leq -\gamma$ si $f(x) \geq K$,

b) $\mathbb{E}_x\left(f(M_1)\right) < +\infty$ si $f(x) \leq K$,

alors si $F = \{x \in \mathcal{S} : f(x) \leq K\}$ fini et $x \not\in F$

$$\mathbb{E}_x(T_F) \leq \frac{f(x)}{\gamma}.$$

et (M_n) ergodique.