

Cours n°5

Réseaux à forme produit

Mercredi 25 octobre 2006

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Table des matières

| | | |
|----------|-------------------------------|-----------|
| 1 | Rappels | 3 |
| 2 | Réversibilité | 6 |
| 3 | Les réseaux avec perte | 29 |
| 4 | Les réseaux de Jackson | 44 |
| 5 | Réseaux Gordon-Newel | 64 |

1. Rappels

Probabilité invariante

(Poly. page 183)

Une probabilité π sur \mathcal{S} vérifie les équations de mesure invariante pour le processus de sauts de matrice $Q = (q(x, y))$ si

Équation de balance globale :

$$\pi(x) \left(\sum_{y \neq x} q(x, y) \right) = \sum_{y \neq x} \pi(y) q(y, x)$$

$x \rightarrow \qquad \qquad \qquad \rightarrow x$

π probabilité invariante.

Stationnarité

π proba. invariante de $(X(t))$.

$X(0) \stackrel{\text{dist}}{=} \pi$ entraîne :

$\forall s \geq 0 \quad (X(s+t), t \geq 0) \stackrel{\text{dist.}}{=} (X(t), t \geq 0)$.

Dans ce cas $(X(t))$ est un processus de
Markov stationnaire.

2. Réversibilité

Renversement du temps

(Poly. page 191)

Le processus renversé : $T > 0$,

$$(X^*(t), t \geq 0) = (X(T - t), t \geq 0)$$

Renversement du temps

(Poly. page 191)

Le processus renversé : $T > 0$,

$$(X^*(t), t \geq 0) = (X(T - t), t \geq 0)$$

Si $(X(t))$ visite successivement

$M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$ sur $[0, T]$

Renversement du temps

(Poly. page 191)

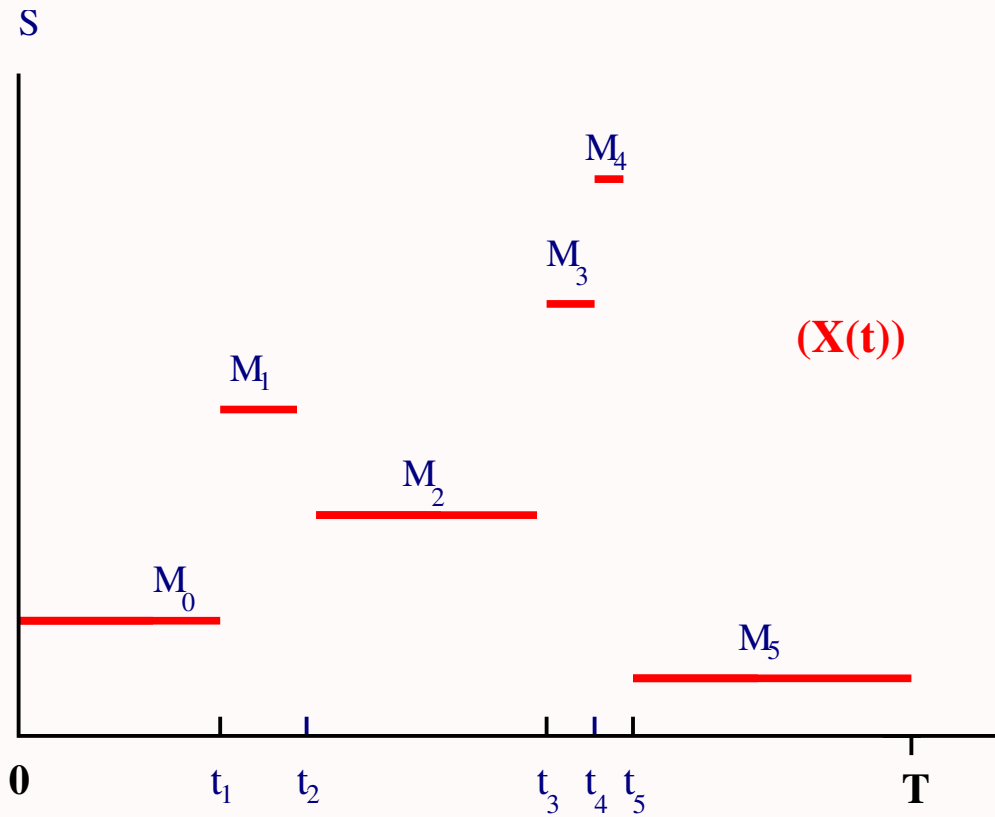
Le processus renversé : $T > 0$,

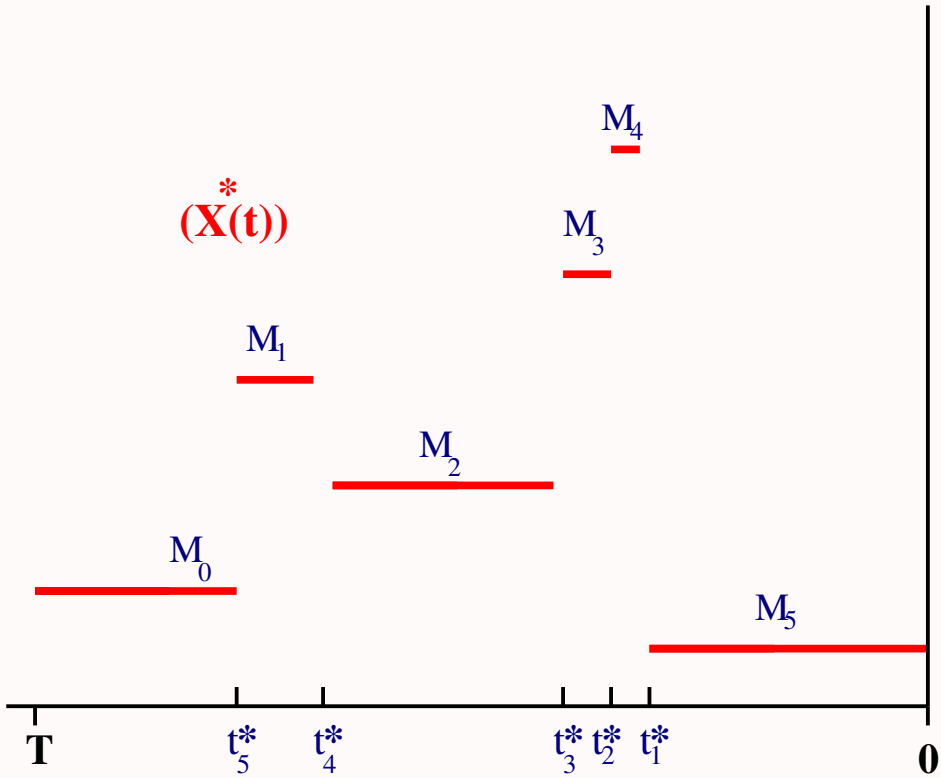
$$(X^*(t), t \geq 0) = (X(T - t), t \geq 0)$$

Si $(X(t))$ visite successivement

$M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$ sur $[0, T]$

$\Rightarrow (X^*(t))$ visite M_n, M_{n-1}, \dots, M_0 .





Matrice de sauts du processus renversé

(Poly. page 191)

Si $(X(t))$ Markov stationnaire,

1. $\Rightarrow (X^*(t))$ Markov

2. matrice de sauts $Q^* = (q^*(x, y))$

$$q^*(x, y) = q(y, x) \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$$

Matrice de sauts du processus renversé

(Poly. page 191)

Si $(X(t))$ Markov stationnaire,

1. $\Rightarrow (X^*(t))$ Markov

2. matrice de sauts $Q^* = (q^*(x, y))$

$$q^*(x, y) = q(y, x) \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$$

$Q^* = (q^*(x, y))$ ne dépend pas de T .

Un contre-exemple

-
- $\mathcal{S} = \{0, 1\}$
 - $q(0, 1) = \lambda$ et $q(1, 0) = 0$.
 - $X(0) = 0$.
-

Un contre-exemple

-
- $\mathcal{S} = \{0, 1\}$
 - $q(0, 1) = \lambda$ et $q(1, 0) = 0$.
 - $X(0) = 0$.
-

Processus non-stationnaire.

Un contre-exemple (II)

Taux de saut de **1** à **0** :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(X^*(t+h) = 0 \mid X^*(t) = 1) \\ = \lambda \frac{\exp(-\lambda(T-t))}{1 - \exp(-\lambda(T-t))} \end{aligned}$$

Un contre-exemple (II)

Taux de saut de **1** à **0** :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(X^*(t+h) = 0 \mid X^*(t) = 1) \\ = \lambda \frac{\exp(-\lambda(T-t))}{1 - \exp(-\lambda(T-t))} \end{aligned}$$

- Le processus $(X^*(t))$ est **Markov**.
- Le processus n'est **pas homogène en temps** :
Transitions dépendent du temps.

Réversibilité

(Poly. page 193)

Un processus est **réversible** si $(X^*(t)) \stackrel{\text{dist.}}{=} (X(t))$

$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$

$\stackrel{\text{dist.}}{=} (X(T - t_1), X(T - t_2), \dots, X(T - t_n)),$

$\forall t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$ et $\forall T$.

Critère de réversibilité

(Poly. page 193)

Un processus de sauts avec proba. invariante π est réversible ssi

$$\pi(x)q(x, y) = \pi(y)q(y, x), \forall x, y \in \mathcal{S}$$

Critère de réversibilité

(Poly. page 193)

Un processus de sauts avec proba. invariante π est réversible ssi

$$\pi(x)q(x, y) = \pi(y)q(y, x), \forall x, y \in \mathcal{S}$$

Équations de balance locale.

Balance locale

Équations de balance locale.

$$\pi(x)q(x, y) = \pi(y)q(y, x), \forall x, y \in \mathcal{S}$$

Balance locale

Équations de balance locale.

$$\pi(x)q(x, y) = \pi(y)q(y, x), \forall x, y \in \mathcal{S}$$

En sommant sur $y \in \mathcal{S}, y \neq x$

$$\pi(x) \sum_{y \neq x} q(x, y) = \sum_{y \neq x} \pi(y)q(y, x)$$

Balance locale

Équations de balance locale.

$$\pi(x)q(x, y) = \pi(y)q(y, x), \forall x, y \in \mathcal{S}$$

En sommant sur $y \in \mathcal{S}, y \neq x$

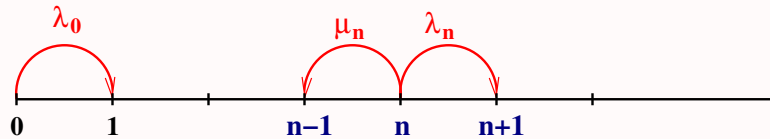
$$\pi(x) \sum_{y \neq x} q(x, y) = \sum_{y \neq x} \pi(y)q(y, x)$$

Réversibilité \Rightarrow Équations de balance globale.

Exemple : Les processus de vie et de mort

(Poly. page 194)

Processus de Markov sur \mathbb{N} , sauts ± 1 ,



Exemple : Les processus de vie et de mort

Équations d'équilibre : (avec $\lambda_{-1} = \mu_0 = 0$),
 $(\lambda_n + \mu_n)\pi(n) = \lambda_{n-1}\pi(n-1) + \mu_{n+1}\pi(n+1)$,
 \Rightarrow

$$\begin{aligned}\lambda_n\pi(n) - \mu_{n+1}\pi(n+1) \\ = \lambda_{n-1}\pi(n-1) - \mu_n\pi(n)\end{aligned}$$

$$a_0 = 0.$$

Exemple : Les processus de vie et de mort

Équations d'équilibre : (avec $\lambda_{-1} = \mu_0 = 0$),
 $(\lambda_n + \mu_n)\pi(n) = \lambda_{n-1}\pi(n-1) + \mu_{n+1}\pi(n+1),$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda_n \pi(n) - \mu_{n+1} \pi(n+1) \\ &= \lambda_{n-1} \pi(n-1) - \mu_n \pi(n) = a_{n-1} \end{aligned}$$

$$a_0 = 0.$$

Les processus de vie et de mort

Conclusion : $n \geq 0$,

$$\lambda_n \pi(n) = \mu_{n+1} \pi(n+1)$$

(Réversibilité)

Les processus de vie et de mort

Conclusion : $n \geq 0$,

$$\lambda_n \pi(n) = \mu_{n+1} \pi(n+1)$$

(Réversibilité)

$$\pi(n) = \pi(0) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad n \geq 0.$$

Candidat pour mesure invariante.

Les processus de vie et de mort (III)

$$\text{Équilibre} \iff \sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} < +\infty$$

Les processus de vie et de mort (III)

$$\text{Équilibre} \iff \sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} < +\infty$$

$$\text{et } \sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_i} = +\infty$$

(Condition de non-explosion)

Les processus de vie et de mort (III)

$$\text{Équilibre} \iff \sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} < +\infty$$

$$\text{et } \sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_i} = +\infty$$

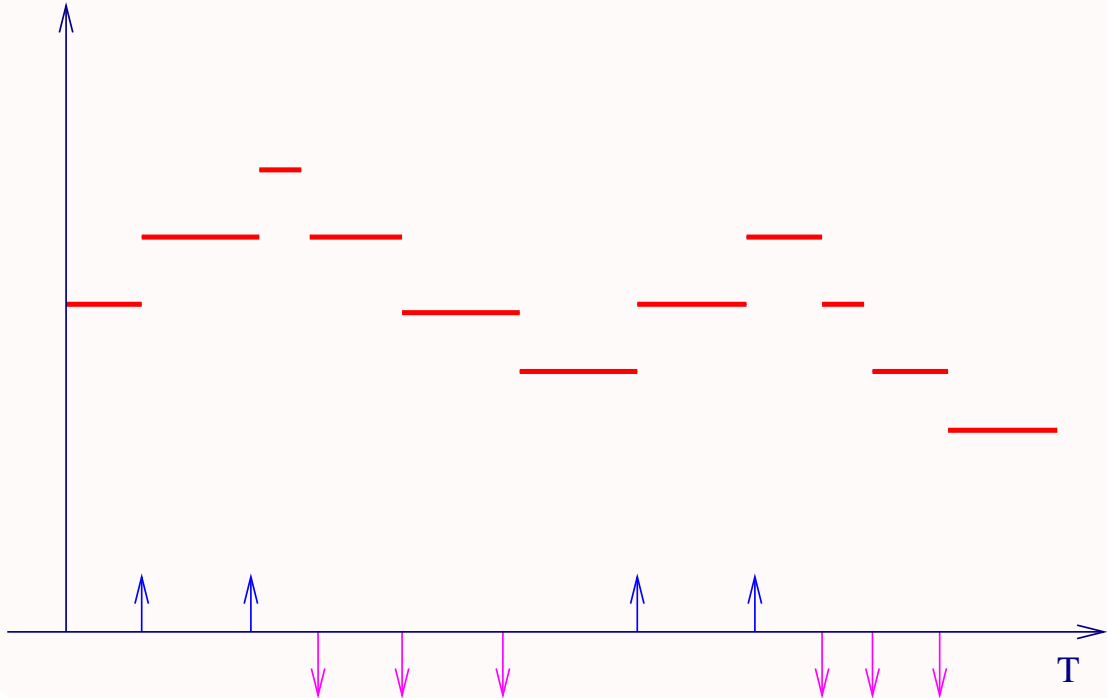
(Condition de non-explosion)

Un processus de vie et de mort
à l'équilibre est toujours réversible.

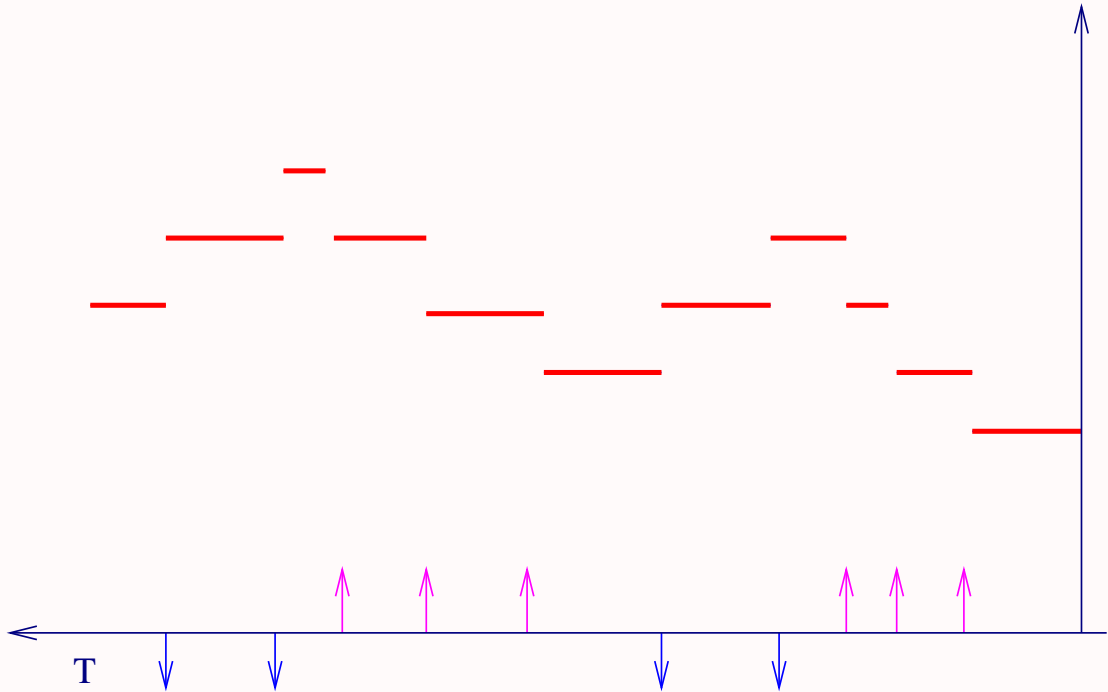
Applications (I)

- Si $\lambda < \mu$ la file $M/M/1$ est réversible ;
- La file $M/M/\infty$ est réversible.
- La file $M/M/K/C$ est réversible ;

Applications (II) : $M/M/1$



Applications (II) : $M/M/1$



(Poly. page 66)

À l'équilibre, les départs d'une file d'attente $M/M/1$ forment un processus de Poisson d'intensité λ .

Théorème de Burke

Applications (III)

- La file $M/M/\infty$ est réversible.
- La file $M/M/K/C$ est réversible ;

Applications (III)

- La file $M/M/\infty$ est réversible.
Départs Poisson ?
- La file $M/M/K/C$ est réversible ;

Applications (III)

- La file $M/M/\infty$ est réversible.
Départs Poisson : OK
- La file $M/M/K/C$ est réversible ;

Applications (III)

- La file $M/M/\infty$ est réversible.
Départs Poisson : OK
- La file $M/M/K/C$ est réversible ;
Départs Poisson ?

Applications (III)

- La file $M/M/\infty$ est réversible.
Départs Poisson : OK
- La file $M/M/K/C$ est réversible ;
Départs Poisson : NON

Réversibilité

Contre-Exemple : Files d'attente en tandem



Réversibilité

Contre-Exemple : Files d'attente en tandem



$$q([1, 0], [0, 1])$$

$$\text{et } q([0, 1], [1, 0])$$

Réversibilité

Contre-Exemple : Files d'attente en tandem



$$q([1, 0], [0, 1]) = \mu_1 \text{ et } q([0, 1], [1, 0])$$

Réversibilité

Contre-Exemple : Files d'attente en tandem



$$q([1, 0], [0, 1]) = \mu_1 \text{ et } q([0, 1], [1, 0]) = 0$$

Réversibilité

Contre-Exemple : Files d'attente en tandem



$$q([1, 0], [0, 1]) = \mu_1 \text{ et } q([0, 1], [1, 0]) = 0$$

La relation

$$\pi([1, 0])q([1, 0], [0, 1]) = \pi([0, 1])q([0, 1], [1, 0])$$

est impossible \Rightarrow pas réversible.

Les réseaux

Réseaux : Un bref aperçu historique

- 1909 : Réseaux téléphoniques.

Réseaux : Un bref aperçu historique

- **1909** : Réseaux téléphoniques.
- **1960** : Réseaux informatiques.
 - Serveur central.
 - Machines parallèles.

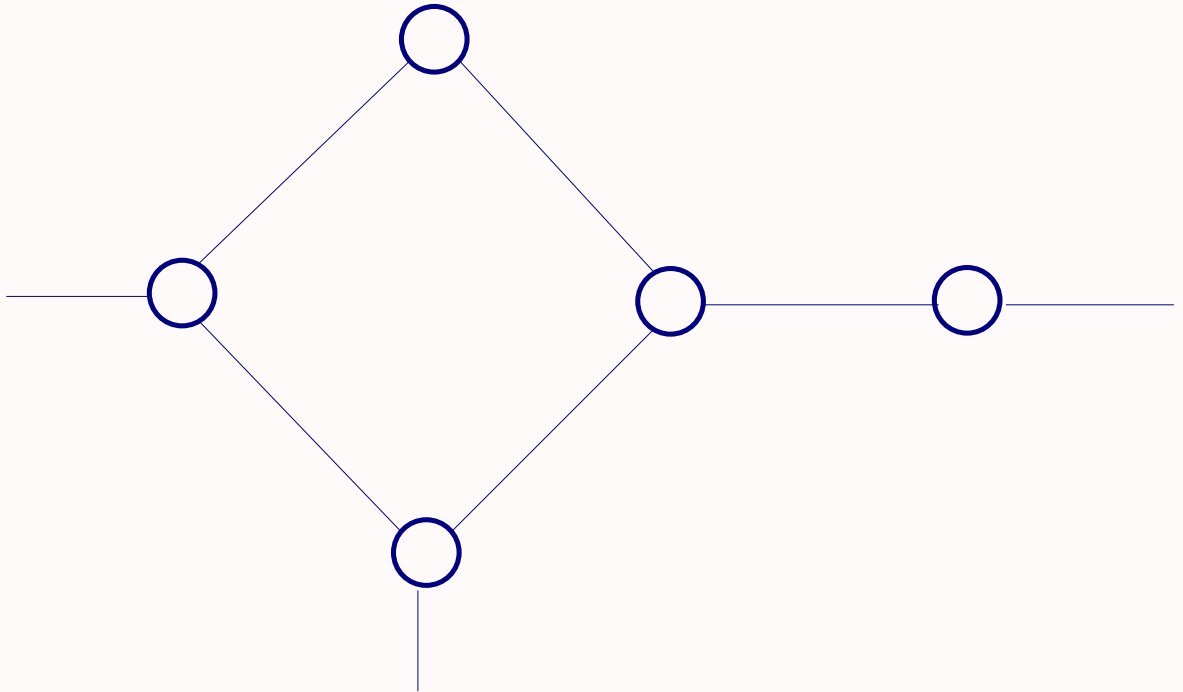
Réseaux : Un bref aperçu historique

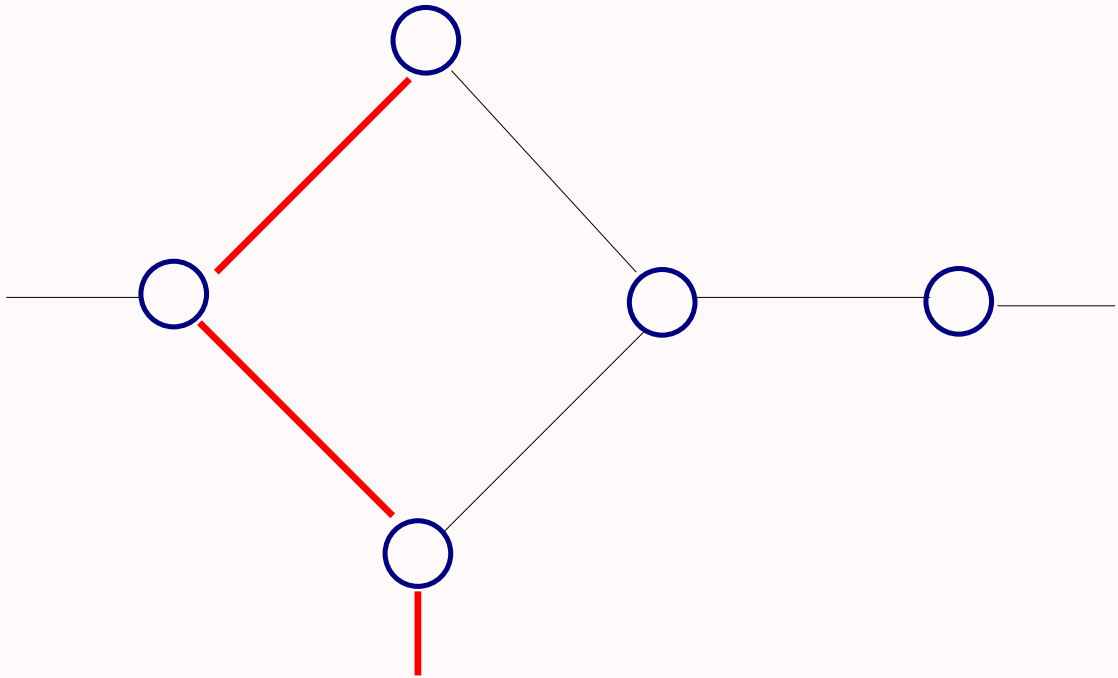
- **1909** : Réseaux téléphoniques.
- **1960** : Réseaux informatiques.
 - Serveur central.
 - Machines parallèles.
- **1980** : Systèmes distribués.
 - Protocoles d'accès.
 - Internet.

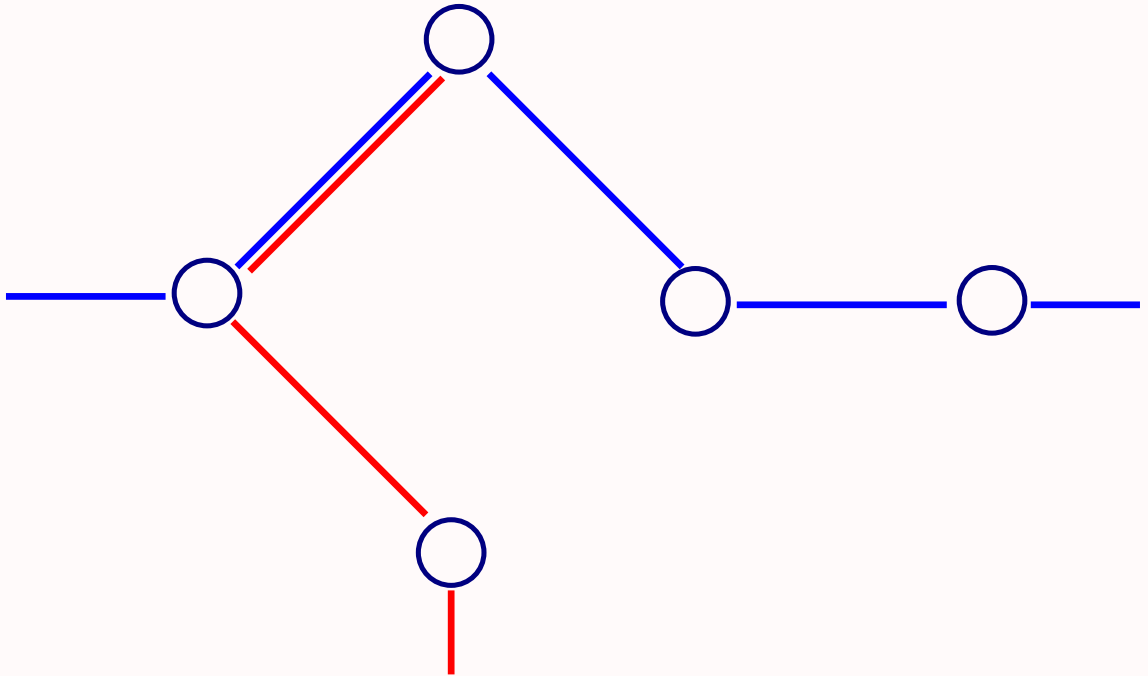
Réseaux et Mathématiques : Les pionniers

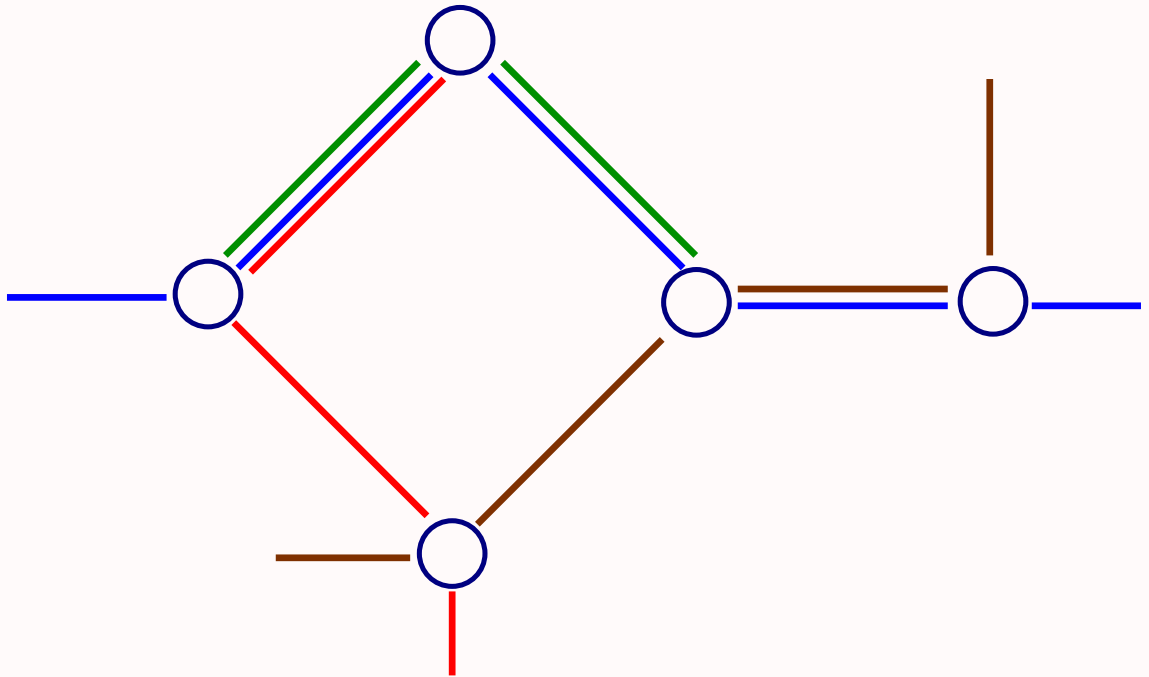
- **Erlang** (1909).
- **Engset** (1865-1943)
- **Palm** (1907-1951)
- **Pollaczek** (1892-1981)
- **Kolmogorov** (1903-1987)
- **Khinchin** (1894-1959).

3. Les réseaux avec perte









- Le réseau téléphonique :
Réseau à commutation de circuits.

- Le réseau téléphonique :
Réseau à commutation de circuits.
- \neq Réseaux à commutation de paquets.
(Internet).

Cas sans contrainte

Réseau : N nœuds

(Poly. page 61)

Espace des routes

$$\mathcal{R} = \{r = (r_1, r_2, \dots, r_p) : r_i \in \{1, \dots, N\}\}$$

Espace d'états

$$\mathcal{S} = \{n = (n_r) \in \mathbb{N}^R\}, \quad R = |\mathcal{R}|$$

Hypothèses probabilistes

- Arrivées **Poisson**, λ_r , sur la route $r \in \mathcal{R}$
- Durée d'une communication sur la route r **exponentielle**, μ_r .

Cas sans contrainte

Processus de Markov

$$L(t) = (L_r(t), r \in \mathcal{R})$$

$L_r(t)$ nombre de communications sur route r .

Cas sans contrainte

Processus de Markov

$$L(t) = (L_r(t), r \in \mathcal{R})$$

$L_r(t)$ nombre de communications sur route r .

Transitions

– Taux d'arrivées sur la route r :

$$q(n, n + e_r) = \lambda_r.$$

– Taux de résidence

$$q(n, n - e_r) = n_r \mu_r.$$

Cas sans contrainte

Réseau : $|\mathcal{R}|$ files $M/M/\infty$ indépendantes.

Cas sans contrainte

Réseau : $|\mathcal{R}|$ files $M/M/\infty$ indépendantes.

\Rightarrow À l'équilibre $(L(t)) = (L_i(t))$ réversible.

Cas sans contrainte

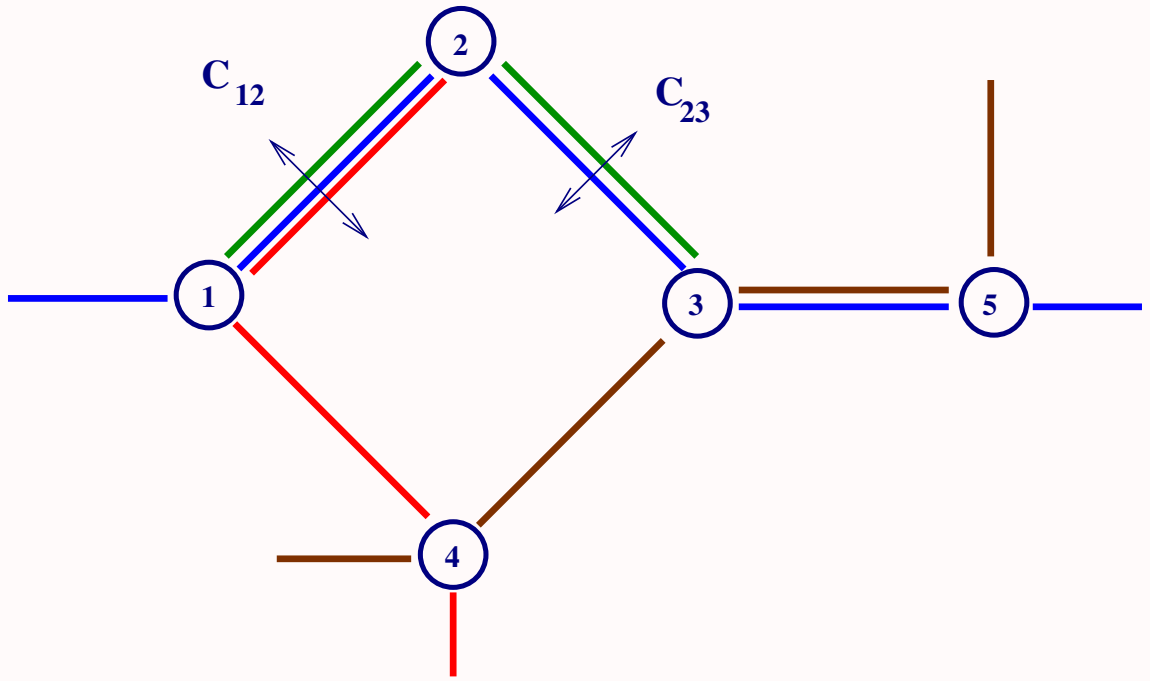
Réseau : $|\mathcal{R}|$ files $M/M/\infty$ indépendantes.

\Rightarrow À l'équilibre $(L(t)) = (L_i(t))$ réversible.

Proba. invariante

$$\tilde{\pi}(\mathbf{n}) = \prod_{r \in \mathcal{R}} \frac{(\lambda_r / \mu_r)^{n_r}}{n_r!} e^{-\lambda_r / \mu_r},$$

pour $\mathbf{n} = (n_r) \in \mathbb{N}^R$.



Cas avec capacité finie

Espace d'états

C_{ij} capacité du lien (i, j) .

$$\mathcal{S} = \left\{ (n_r) : \sum_{r \in \mathcal{R}, (x_i, x_j) \in r} n_r \leq C_{ij}, \quad \forall i, j \right\}.$$

Transitions

Les arrivées de routes qui font sortir ($L(t)$) de S sont rejetées.

Transitions

Les arrivées de routes qui font sortir ($L(t)$) de \mathcal{S} sont rejetées.

– Taux d'arrivées sur la route r :

$$q(n, n + e_r) = \lambda_r 1_{\{n + e_r \in \mathcal{S}\}}.$$

– Taux de sortie

$$q(n, n - e_r) = n_r \mu_r$$

Proba. invariante avec capacité finie

(Poly. page 63)

$$\tilde{\pi}_S(n) = K_S \prod_{r \in \mathcal{R}} \frac{(\lambda_r / \mu_r)^{n_r}}{n_r!},$$

K_S : constante de normalisation,

$$K_S^{-1} = \sum_{n \in \mathcal{S}} \prod_{r \in \mathcal{R}} (\lambda_r / \mu_r)^{n_r} / n_r!$$

Proba. invariante avec capacité finie

(Poly. page 63)

$$\tilde{\pi}_S(n) = K_S \prod_{r \in \mathcal{R}} \frac{(\lambda_r / \mu_r)^{n_r}}{n_r!},$$

K_S : constante de normalisation,

$$K_S^{-1} = \sum_{n \in \mathcal{S}} \prod_{r \in \mathcal{R}} (\lambda_r / \mu_r)^{n_r} / n_r!$$

Formule produit

Constante K_S difficile à exprimer.

Réseau avec perte à un lien

Capacité N

$\rho = \lambda/\mu$, pour $x \in \{0, \dots, N\}$,

$$\pi(x) = \frac{\rho^x}{x!} \bigg/ \sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}$$

Réseau avec perte à un lien

Capacité N

$\rho = \lambda/\mu$, pour $x \in \{0, \dots, N\}$,

$$\pi(x) = \frac{\rho^x}{x!} \bigg/ \sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}$$

Proba de perte

$$\pi(N) = \frac{\rho^N}{N!} \bigg/ \sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}$$

4. Les réseaux de Jackson

Les données

(Poly. page 65)

- N nœuds (files d'attente) : $\{1, 2, \dots, N\}$.

Les données

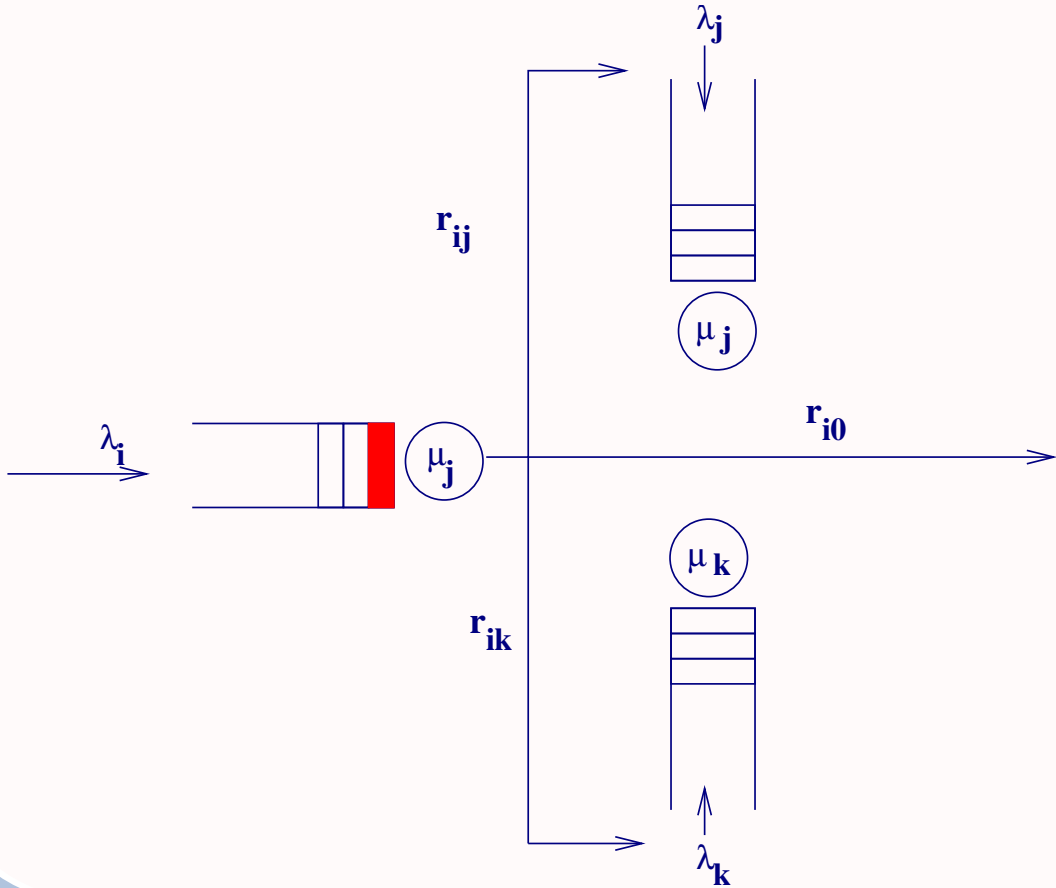
(Poly. page 65)

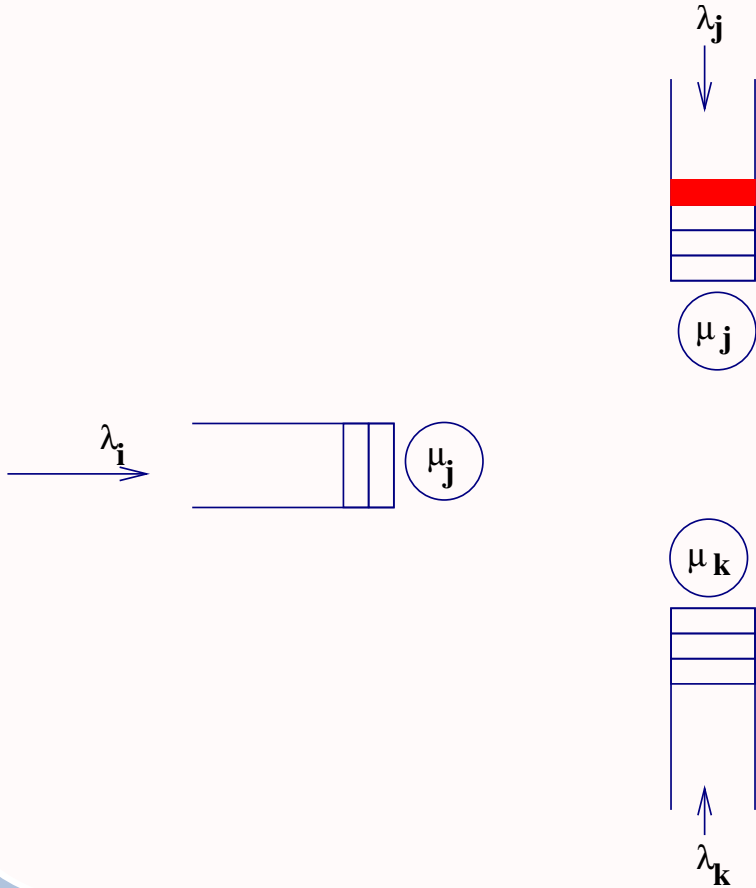
- N nœuds (files d'attente) : $\{1, 2, \dots, N\}$.
- Au nœud i :
 - Arrivées extérieures Poisson (λ_i)
 - Services exponentiels (μ_i)

Les données

(Poly. page 65)

- N nœuds (files d'attente) : $\{1, 2, \dots, N\}$.
- Au nœud i :
Arrivées extérieures Poisson (λ_i)
Services exponentiels (μ_i)
- r_{ij} proba nœud $i \rightarrow$ nœud j après service.
- r_{i0} proba de quitter le réseau après nœud i .





Processus de Markov associé

- $L_i(t)$:
nombre de clients au nœud i à l'instant t .
 - $L(t) = (L_1(t), \dots, L_N(t))$:
processus de Markov.
 - Espace d'états $\mathcal{S} = \mathbb{N}^N$.
-

Matrice de sauts

$$\mathbf{n} = (n_i) \in \mathcal{S} = \mathbb{N}^N,$$

e_i : i -ième vecteur unité de \mathcal{S}

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + e_i) =$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + e_i - e_j) =$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - e_j) =$$

Matrice de sauts

$$\mathbf{n} = (n_i) \in \mathcal{S} = \mathbb{N}^N,$$

e_i : i -ième vecteur unité de \mathcal{S}

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + e_i) = \lambda_i$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + e_i - e_j) =$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - e_j) =$$

Matrice de sauts

$$\mathbf{n} = (n_i) \in \mathcal{S} = \mathbb{N}^N,$$

e_i : i -ième vecteur unité de \mathcal{S}

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + e_i) = \lambda_i$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + e_i - e_j) = \mu_j r_{ji} \quad \text{si } n_j > 0$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - e_j) =$$

Matrice de sauts

$$\mathbf{n} = (n_i) \in \mathcal{S} = \mathbb{N}^N,$$

e_i : i -ième vecteur unité de \mathcal{S}

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + e_i) = \lambda_i$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + e_i - e_j) = \mu_j r_{ji} \quad \text{si } n_j > 0$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - e_j) = \mu_j r_{j0} \quad \text{si } n_j > 0$$

Hypothèse :

Les valeurs propres de la matrice
 $(r_{ij}, 1 \leq i, j \leq N)$ de module < 1

Hypothèse :

Les valeurs propres de la matrice
 $(r_{ij}, 1 \leq i, j \leq N)$ de module < 1

⇒ Un client qui entre,
sort avec probabilité **1**.

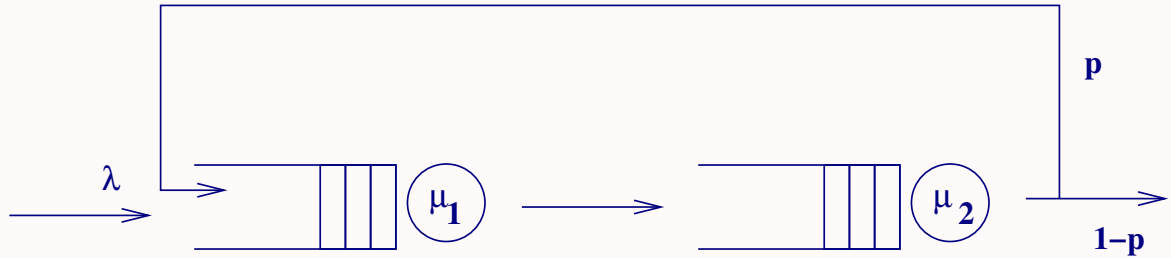
Exemples

Files d'attente en tandem



Exemples

Files d'attente en tandem avec bouclage



Les équations de trafic

(Poly. page 69)

Équations d'équilibre des flux

Il existe un unique vecteur $(\bar{\lambda}_i) \geq 0$ vérifiant

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j r_{ji}.$$

Les équations de trafic

(Poly. page 69)

Équations d'équilibre des flux

Il existe un unique vecteur $(\bar{\lambda}_i) \geq 0$ vérifiant

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j r_{ji}.$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(I - R)^{-1}$$

Équilibre

Si $\bar{\rho}_i = \bar{\lambda}_i / \mu_i$.

Si $\bar{\rho}_i < 1 \forall i$,

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^N \bar{\rho}_i^{n_i} (1 - \bar{\rho}_i)$$

probabilité invariante du réseau de Jackson.

(Poly. page 70)

Équilibre (II)

À l'équilibre les variables $L_i(t)$, $1 \leq i \leq N$

- indépendantes ;
 - distribution géométrique.
-

Preuve :
Vérifier les équations de balance globale.

Preuve

Équation à vérifier :

$$\pi(x) \sum_{y \neq x} q(x, y) \stackrel{?}{=} \sum_{y \neq x} \pi(y) q(y, x)$$

Preuve

Équation à vérifier :

$$\sum_{y \neq x} q(x, y) \stackrel{?}{=} \sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x)$$

Si $x = (x_i)$ avec $x_i > 0, \forall i,$

$$\begin{aligned} \sum_{y \neq x} q(x, y) &= \sum_{i, j=1}^N q(x, x + e_j - e_i) \\ &+ \sum_{i=1}^N q(x, x + e_i) + \sum_{i=1}^N q(x, x - e_i) \end{aligned}$$

Si $x = (x_i)$ avec $x_i > 0, \forall i,$

$$\begin{aligned} \sum_{y \neq x} q(x, y) &= \sum_{i,j=1}^N q(x, x+e_j-e_i) \\ &+ \sum_{i=1}^N q(x, x+e_i) + \sum_{i=1}^N q(x, x-e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \mu_i r_{ij} + \sum_{i=1}^N \lambda_i + \mu_i r_{i0} \end{aligned}$$

Si $x = (x_i)$ avec $x_i > 0, \forall i,$

$$\begin{aligned} \sum_{y \neq x} q(x, y) &= \sum_{i,j=1}^N q(x, x+e_j-e_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N q(x, x+e_i) + \sum_{i=1}^N q(x, x-e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \mu_i r_{ij} + \sum_{i=1}^N \lambda_i + \mu_i r_{i0} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\lambda_i + \mu_i \left[\sum_{j=1}^N r_{ij} + r_{i0} \right] \right) \end{aligned}$$

Si $x = (x_i)$ avec $x_i > 0, \forall i,$

$$\begin{aligned}\sum_{y \neq x} q(x, y) &= \sum_{i,j=1}^N q(x, x+e_j-e_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N q(x, x+e_i) + \sum_{i=1}^N q(x, x-e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \mu_i r_{ij} + \sum_{i=1}^N \lambda_i + \mu_i r_{i0} \\ &= \sum_{i=1}^N (\lambda_i + \mu_i)\end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned}\sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) &= \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x + e_i)}{\pi(x)} q(x + e_i, x) \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x - e_i)}{\pi(x)} q(x - e_i, x) \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \frac{\pi(x + e_j - e_i)}{\pi(x)} q(x + e_j - e_i, x)\end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned} \sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) &= \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x + e_i)}{\pi(x)} \mu_i r_{i0} \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x - e_i)}{\pi(x)} \lambda_i \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \frac{\pi(x + e_j - e_i)}{\pi(x)} \mu_j r_{ji} \end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned} \sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) &= \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \mu_i r_{i0} \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x - e_i)}{\pi(x)} \lambda_i \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \frac{\pi(x + e_j - e_i)}{\pi(x)} \mu_j r_{ji} \end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned} \sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) &= \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \mu_i r_{i0} \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{\rho}_i} \lambda_i \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \frac{\pi(x + e_j - e_i)}{\pi(x)} \mu_j r_{ji} \end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned} \sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) &= \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \mu_i r_{i0} \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{\rho}_i} \lambda_i \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \frac{\bar{\rho}_j}{\bar{\rho}_i} \mu_j r_{ji} \end{aligned}$$

Preuve (fin)

$$\sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) = \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{i0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{\rho}_i} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j r_{ji} \right)$$

Preuve (fin)

$$\sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) = \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{i0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{\rho}_i} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j r_{ji} \right)$$

Équations de trafic :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{\rho}_i} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j r_{ji} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{\rho}_i} \bar{\lambda}_i = \sum_{i=1}^N \mu_i$$

$$\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{i0} = \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i \left(1 - \sum_{j=1}^N r_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{i0} &= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i \left(1 - \sum_{j=1}^N r_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{i0} &= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i \left(1 - \sum_{j=1}^N r_{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^N (\bar{\lambda}_j - \lambda_j) = \sum_{i=1}^N \lambda_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{i0} &= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i \left(1 - \sum_{j=1}^N r_{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^N (\bar{\lambda}_j - \lambda_j) = \sum_{i=1}^N \lambda_i
\end{aligned}$$

$$\sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) = \sum_{i=1}^N (\lambda_i + \mu_i)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{i0} &= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i \left(1 - \sum_{j=1}^N r_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i r_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^N (\bar{\lambda}_j - \lambda_j) = \sum_{i=1}^N \lambda_i\end{aligned}$$

$$\sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x) = \sum_{i=1}^N (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{y \neq x} q(x, y)$$

Réseau de Jackson

À l'équilibre les variables $L_i(t)$, $1 \leq i \leq N$

- indépendantes ;
 - distribution géométrique. paramètres $(\bar{\rho}_i)$
-

Réseau de Jackson

À l'équilibre les variables $L_i(t)$, $1 \leq i \leq N$

- indépendantes ;
 - distribution géométrique. paramètres $(\bar{\rho}_i)$
-

Jackson à l'équilibre à un instant donné :
des files $M/M/1$, $(\bar{\lambda}_i, \mu_i)$, $1 \leq i \leq N$
indépendantes.

Le réseau de Jackson renversé

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_i &= \bar{\lambda}_i r_{i0}, & \tilde{\mu}_i &= \mu_i, \\ \tilde{p}_{ij} &= \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_i} r_{ji}, & \tilde{p}_{i0} &= \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}_i},\end{aligned}$$

Le réseau de Jackson renversé

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_i &= \bar{\lambda}_i r_{i0}, & \tilde{\mu}_i &= \mu_i, \\ \tilde{p}_{ij} &= \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_i} r_{ji}, & \tilde{p}_{i0} &= \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}_i},\end{aligned}$$

C'est aussi un réseau de Jackson.

Le réseau de Jackson renversé

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_i &= \bar{\lambda}_i r_{i0}, & \tilde{\mu}_i &= \mu_i, \\ \tilde{p}_{ij} &= \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_i} r_{ji}, & \tilde{p}_{i0} &= \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}_i},\end{aligned}$$

C'est aussi un réseau de Jackson.

Les départs définitifs de chaque nœud sont Poisson.

5. Réseaux Gordon-Newel

Les paramètres

(Poly. page 71)

- Réseau fermé à N nœuds : $\{1, 2, \dots, N\}$.
- M clients.
- Services exponentiels (μ_i) au nœud i .
- r_{ij} nœud $i \rightarrow$ nœud j après service

$$r_{i1} + r_{i1} + \dots + r_{iN} = 1.$$

Processus de Markov associé

- $L_i(t)$: nb de clients au nœud i à t .
- $L(t) = (L_1(t), \dots, L_N(t))$,
processus de Markov.
- Espace d'états

$$\mathcal{S} = \left\{ n = (n_i) : \sum_i n_i = M \right\}$$

Matrice de sauts

$$q(n, n - e_i + e_j) = \mu_i r_{ij} \quad \text{si } n_i > 0$$

Matrice de sauts

$$q(n, n - e_i + e_j) = \mu_i r_{ij} \quad \text{si } n_i > 0$$

Hypothèse : La matrice $(r_{ij}, 1 \leq i, j \leq N)$ est irréductible.

Matrice de routage

R : matrice de transition
irréductible sur $\{1, \dots, N\}$

Matrice de routage

R : matrice de transition
irréductible sur $\{1, \dots, N\}$

\Rightarrow il existe (ν_i) tel que

$$\nu_i = \sum_1^N \nu_j r_{ji},$$

Équation de proba. invariante pour $R = (r_{ij})$.

Proba invariante

Forme produit : si $\rho_i = \nu_i / \mu_i$,

$$\pi(n) = K \prod_1^N \rho_i^{n_i},$$

K est la constante de normalisation.