École Polytechnique
Cours de Majeure
Réseaux de Communication,
Algorithmes et Probabilités.

Petite Classe n° 1
Le Mercredi 27 septembre 2006

Modélisation markovienne

Exercice 1

Propriété de Markov.
Montrez que s'il existe une matrice de transition $P = (p(x,y), x, y \in \mathcal{S})$ et $n \geq 1$ tels que

$$\mathbb{P}(M_n = y | M_{n-1} = x, M_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, M_0 = x_0) = p(x,y)$$

pour tous y, x, x_{n-2}, ... , x_0 dans $\mathcal{S}$, alors $\mathbb{P}(M_n = y | M_{n-1} = x) = p(x,y)$.

Exercice 2

Chaîne de Markov de renouvellement.
On considère la matrice de transition $(p(x,y)$ d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ définie par

$$p(x, x-1) = 1, \qquad x \geq 1, \qquad p(0,x) = \mu(x), \tag{1}$$

où $(\mu(x), x \geq 1)$ est une probabilité sur $\mathbb{N}$.

1. À quelle condition est-elle irréductible sur $\mathbb{N}$?

   Une machine donnée a une durée de fonctionnement avant de tomber en panne dont la loi est donnée par la probabilité $(\mu(x), x \geq 1)$.
2. Les réparations sont supposées instantanées. Donner un modèle markovien de ce système en précisant la matrice de transition.
3. La durée R de réparation est maintenant aléatoire de loi $(\nu(x), x \geq 1)$ sur $\mathbb{N}$. Même question.
4. Donner l'équation d'équilibre de la chaîne de Markov, à quelle condition a-t-elle une solution ?

Exercice 3

Indice de popularité d'une page web.
On suppose qu'un site web numéroté 0, contient les références aux N pages web des élèves numérotées de 1 à N. Chacune de ces pages fait référence au site central 0.

1. Quel est l'indice de popularité d'une page web i, $1 \leq i \leq N$?
2. Comment deux élèves donnés peuvent ils accroître l'indice de popularité de leur page web ? Discuter de l'impact.

Exercice 4

Les épreuves d'un livre sont lues successivement par une suite infinie de lecteurs. À chaque fois le lecteur corrige les erreurs avec probabilité $p > 0$ mais introduit un nombre aléatoire E de nouvelles erreurs. On note h la fonction génératrice de la variable E, $h(z) = \mathbb{E}(z^E)$.

1. Décrivez ceci par une chaîne de Markov (X_n). Sous quelles conditions est-elle irréductible ?
2. Calculez $g_n(z) = \mathbb{E}(z^{X_n})$ en fonction de g_{n-1} et de h. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?
3. Donnez une expression pour la fonction génératrice de la loi invariante de (X_n). Préciser lorsque le nombre de nouvelles erreurs suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 5

Records. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = q$ avec $p + q = 1$, et R_n le plus grand nombre de 1 consécutifs observés dans $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Justifier que $(R_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.
2. Soit $X_0 = 0$ et $D_n = \inf\{\, k \geq 0 : X_{n-k} = 0 \,\}$ pour $n \geq 0$. Montrer que $(D_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
3. Soit $k \geq 0$, $T_k = \inf\{\, n \geq 0, D_n = k \,\}$, et $Z_n = D_n$ si $n \leq T_k$ et $Z_n = k$ sinon. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\{0, 1, \ldots, k\}$, et donner sa matrice P_k.
4. Exprimer $\mathbb{P}(R_n \geq k)$ en fonction de Z_n, puis de P_k. En déduire la loi de R_n en fonction des P_k.

Exercice 6

L'urne d'Ehrenfest (Exemple 7 page 84 du cours) est décrite par une chaîne de Markov sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ dont la matrice de transition est définie par $p(x, x-1) = x/N$ et $p(x, x+1) = 1-x/N$.

1. Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible dès que $N \geq 2$.
2. Montrer qu'il existe une probabilité invariante π donnée par

$$\pi(x) = \frac{C_N^x}{2^N}, \quad x = 0, \ldots, N.$$

Exercice 7

Si P est la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ définie par, pour $x \in \mathbb{N}$,

$$p(x, x+1) = \lambda/(\lambda + x\mu) \qquad \text{et} \qquad p(x, x-1) = x\mu/(\lambda + x\mu).$$

1. Montrer que si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ la chaîne de Markov associée est irréductible.
2. Montrer que la probabilité invariante est donnée par

$$\pi(x) = \left(\frac{\lambda^x}{\prod_{i=0}^{x}(\lambda + i\mu)}\right), \qquad x \in \mathbb{N}$$

est la probabilité invariante de cette chaîne de Markov.