École Polytechnique
Cours de Majeure
*Réseaux de Communication,*
*Algorithmes et Probabilités.*

*Petite Classe n° 3*
*Le Mercredi 11 octobre 2006*

# Processus de sauts

## Exercice 1

Deux lignes de bus $A$ et $B$ desservent le même arrêt, les instants de passage à cet arrêt de chacune de ces lignes sont des processus de Poisson indépendants. La durée moyenne entre deux bus de la ligne $A$ [resp. $B$] est d'une heure [resp. une demi-heure].

1. En arrivant au hasard à l'arrêt, quel est le temps d'attente moyen pour voir un bus de la ligne $A$ ?
2. Quelle est la probabilité de voir passer trois bus en une heure ?
3. Quelle est la loi du nombre de bus de la ligne $B$ que voit un passager de la ligne $A$ en attendant son bus ?
4. Si lors d'une grève la moitié des bus sont indisponibles, quel est le temps d'attente moyen pour voir une bus ?

## Exercice 2

On considère la chaîne de Markov $(X_n)$ sur $\mathbb{N}$ de matrice

$$p(x, x+1) = p > 0\,, \quad p(x+1, x) = q = 1-p > 0\,, \quad p(0,0) = q\,.$$

On pose $T = \inf\{\, n \geq 0 : X_n = 0 \,\}$ et $g_x(z) = \mathbb{E}_x(z^T)$ pour $x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq z \leq 1$.

1. Donner une CNS pour qu'il y ait une loi invariante et la calculer.
2. Montrer que $T$ est un temps d'arrêt, et que $g_x(z) = g_1(z)^x$.
3. Montrez que $g_0(z) = 1$ et $g_x(z) = pzg_{x+1}(z) + qzg_{x-1}(z)$. Déduisez-en
$$g_x(z) = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pz} \right)^x .$$
4. Montrer que $\mathbb{P}_x(T < \infty) = \min\{1, (q/p)^x\}$ et que $\mathbb{E}_x(T) = x/(q-p)$ pour $p < q$ et $\mathbb{E}_x(T) = \infty$ pour $p \geq q$.

## Exercice 3

Des demandes d'appel arrivent à un central téléphonique suivant un processus de Poisson d'intensité $\lambda$, les communications sont établies dès leur arrivée.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux appels arrivant simultanément ?
2. Si les communications ont une durée de loi exponentielle de paramètre $\mu$ et qu'à un instant donné il y a $n$ communications en cours, quelle est la distribution du premier instant où l'une d'entre elles aura fini ?
3. Montrer que le nombre d'appels à l'instant $t$ est un processus de sauts. Quelle est sa matrice de sauts ?

4. On suppose que les durées de communications sont constantes égales à $a > 0$. Calculer la distribution de $L(t)$ le nombre de communication en cours à l'instant $t$. Montrer que la variable $L(t)$ converge en distribution quand $t$ tend vers l'infini.
5. Même question que précédemment quand la durée d'une communication a une distribution générale.

## Exercice 4

Un électron dans un atome est soit au repos (état 1) soit excité (état 2). Il reste au repos pendant une durée exponentielle de paramètre $\lambda$ avant de devenir excité. Il reste excité pendant une durée exponentielle de paramètre $\mu$ avant de passer au repos, et tout cela indépendamment du passé. On note $X(t)$ l'état de l'électron à l'instant $t \geq 0$.

1. Montrer que $(X(t))$ est un processus de Markov et en donner la matrice de sauts.
2. Donner les équations de Kolmogorov et les résoudre.

## Exercice 5

Donner un modèle markovien des systèmes ci-dessous et calculer leur matrice de sauts associée.

1. *File d'attente en tandem.*
   Des clients arrivent suivant un flot de Poisson d'intensité $\lambda$ au guichet 1 puis, une fois servis passent au guichet 2. Au guichet $i = 1, 2$, un client reçoit un service de durée exponentielle de paramètre $\mu_i$. Le service se fait dans l'ordre des arrivées. On note $L_i(t)$ le nombre de clients en attente au guichet $i$ à l'instant $t$.
2. *File d'attente prioritaire.*
   Une station reçoit deux types de messages (ou clients), $A$ et $B$, les messages de type $A$ [resp. $B$] arrivent suivant un processus de Poisson d'intensité $\lambda_A$ [resp. $\lambda_B$] et la durée de la connexion est distribuée exponentiellement de paramètre $\mu_A$ [resp. $\mu_B$]. Les clients de type $A$ sont prioritaires, un message de type $B$ ne peut être servi que s'il n'y a aucun message de type $A$. Un client $B$ en service est interrompu quand un client $A$ se présente à la file d'attente (service préemptif). Les traitements se font dans l'ordre des arrivées, les messages sont stockés dans un file d'attente.

## Exercice 6

Une colonie de bactéries se développe de la façon suivante : chaque bactérie se scinde en deux au bout d'un temps exponentiel de paramètre $\lambda$. Initialement il y a une bactérie et toutes les variables aléatoires sont supposées indépendantes. On note $X(t)$ le nombre de bactéries à l'instant $t$ ($X(0) = 1$).

1. Si $X_2(t)$ est le nombre de bactéries quand il y initialement deux bactéries, montrer que, pour $u \in [0, 1]$
$$\mathbb{E}\left(u^{X_2(t)}\right) = \left(\mathbb{E}\left(u^{X(t)}\right)\right)^2.$$
2. Si $\phi(t) = \mathbb{E}\left(X(t)\right)$, montrer que
$$\phi(t) = e^{-\lambda t} + 2\int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\phi(t-s)\,ds.$$
   En déduire la loi de $\phi(t)$.
3. Si on suppose que la durée de vie d'une bactérie a une distribution exponentielle de paramètre $\mu$. Si $P_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n)$, montrer que pour $n \geq 1$,
$$\frac{d}{dt}P_n(t) = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t).$$