École Polytechnique
Cours de Majeure
Réseaux de Communication,
Algorithmes et Probabilités.

Petite Classe n° 6
Le Mercredi 8 novembre 2006

Protocoles d'accès — Critères de stabilité

Exercice 1

Processor-Sharing multiclasse.
On considère une file d'attente de capacité infinie avec un serveur et c classes de clients. Les clients de classe $i \in \{1, \ldots, c\}$ arrivent suivant un processus de Poisson d'intensité λ_i, et sont servis selon une loi exponentielle de paramètre μ_i. La discipline de service est de type "Processor-Sharing".

1. Donner la matrice de sauts du processus de Markov $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_c(t))$, $t \geq 0$, décrivant le nombre des clients dans chacune des classes du système.
2. Écrire les équations de probabilité invariante associée à ce processus de Markov. Si $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ et $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_c$, à quelle condition ces équations ont elles une solution ?

Exercice 2

On considère une file d'attente à un serveur avec le fonctionnement suivant : si un client termine son service à l'instant t, il revient dans la file d'attente avec la probabilité $\exp(-L(t))$ si $L(t)$ est le nombre de clients à l'instant t. Les arrivées sont Poisson de paramètre λ et les services exponentiels de paramètre μ.

1. Si Y_n est le nombre de clients dans la file juste après le n-ième service effectué. Montrer que la suite (Y_n) est une chaîne de Markov irréductible.
2. À quelle condition la chaîne de Markov (Y_n) est elle ergodique ?

Exercice 3

Chaîne de Markov de renouvellement.
On considère la matrice de transition $(p(x, y)$ d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} p(x, x-1) & = 1, \qquad x \geq 1 \\ p(0, x) & = \mu_x, \end{cases}$$

où (μ_x) est une probabilité sur $\mathbb{N}$.

— Donner la condition pour laquelle cette chaîne de Markov est ergodique.

Exercice 4

Des requêtes de transmission arrivent à un canal de communication suivant un processus de Poisson d'intensité λ. Si le canal est libre, la communication commence et sa durée a une distribution exponentielle de paramètre μ. Sinon, une nouvelle demande par la requête est effectuée au bout d'une durée de distribution exponentielle de paramètre δ et ainsi de suite jusqu'à la réussite de la transmission du message.

1. Pour $N \geq 1$ la variable T_n est l'instant où le n-ième message a été transmis et Y_n le nombre de messages en attente dans le réseau à cet instant. Calculer la loi de $T_{n+1} - T_n$ conditionnellement à $\{Y_n = N\}$.
2. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov homogène, irréductible sur $\mathbb{N}$.
   Calculer $E(Y_1 - Y_0 \mid Y_0 = N)$.
3. Montrer que si $\lambda < \mu$, alors le canal est stable : (Y_n) est une chaîne de Markov ergodique. Noter que le paramètre δ ne joue aucun rôle.
4. Si $\lambda > \mu$, montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov transiente (le canal est instable).

Exercice 5

Aloha avec deux sources.

On considère un canal avec deux émetteurs 1 et 2, pour $n \geq 1$, l'émetteur 1 reçoit A_n nouveaux messages à la n-ième unité de temps. La suite (A_n) est supposée i.i.d. Chaque émetteur n'essaie de transmettre qu'un message à la fois, les autres étant stockés dans une file d'attente. Le protocole utilisé est Aloha avec le paramètre p (chaque unité de temps, il y a essai avec proba p). On pose $\lambda_1 = \mathbb{E}(A_1)$.

On suppose pour l'instant que l'émetteur 2 a une infinité de messages à envoyer.

1. Si $\lambda_1 < p(1-p)$, alors montrer que le système est stable (on définira la notion associée).
2. Montrer que si $\lambda_1 > p(1-p)$ et $\mathbb{E}(A_1^2) < +\infty$, alors le système est instable.

On suppose maintenant que l'émetteur 2 n'est plus saturé mais reçoit B_n nouveaux messages pendant la n-ième unité de temps. La suite (B_n) est i.i.d. et $\lambda_2 = \mathbb{E}(B_1)$.

3. Montrer que le système est stable si $\lambda_1 < p(1-p)$ et $\lambda_2 < p(1-p)$.

Exercice 6

Marche aléatoire réfléchie modulée par un processus de Markov

On note (X_n) une chaîne de Markov sur $\{0,1\}$ dont la matrice de transition $p(\cdot,\cdot)$ est donnée par $p(0,1) = \alpha = 1 - p(0,0)$ et $p(1,0) = \beta = 1 - p(1,1)$, avec α et $\beta \in]0,1[$.

0. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ il existe N tel que si $n \geq N$ alors
$$\left| \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} 1_{\{X_k=0\}}\right) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right| \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq 1$, un canal de communication reçoit A_n messages la n-ième unité de temps. La distribution de A_n est donnée de la façon suivante, pour $x \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{P}(A_n = x \mid X_n = 0) = \mu_0(x) \text{ et } \mathbb{P}(A_n = x \mid X_n = 0) = \mu_1(x).$$

Chaque message est servi en une unité de temps et la discipline est FIFO.

1. Donner un modèle markovien (Z_n) de ce système.
2. Montrer que si les conditions
$$\lambda_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_x x\mu_0(x) < 1 \text{ et } \lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_x x\mu_1(x) < 1$$
   sont satisfaites alors le réseau est stable.
3. Montrer que, pour $N \in \mathbb{N}$, la suite $(Y_n^N) = (Z_{nN}, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov irréductible.
4. Montrer que si la chaîne (Y_n^N) est ergodique alors (Z_n) l'est aussi.
5. En déduite que si $\beta\lambda_0 + \alpha\lambda_1 < \alpha + \beta$ alors le réseau de communication est stable. Comparer avec la condition de la question 2.