École Polytechnique
Cours de Majeure
Réseaux de Communication,
Algorithmes et Probabilités.

Petite Classe n° 7
Le Mercredi 15 novembre 2006

Protocoles d'accès (II)

Exercice 1

Des requêtes de transmission arrivent à un canal de communication suivant un processus de Poisson d'intensité λ. Si le canal est libre, la communication commence et sa durée a une distribution exponentielle de paramètre μ. Sinon, une nouvelle demande par la requête est effectuée au bout d'une durée de distribution exponentielle de paramètre δ et ainsi de suite jusqu'à la réussite de la transmission du message.

1. Pour $N \geq 1$ la variable T_n est l'instant où le n-ième message a été transmis et Y_n le nombre de messages en attente dans le réseau à cet instant. Calculer la loi de $T_{n+1} - T_n$ conditionnellement à $\{Y_n = N\}$.
2. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov homogène, irréductible sur $\mathbb{N}$.
   Calculer $E(Y_1 - Y_0 \mid Y_0 = N)$.
3. Montrer que si $\lambda < \mu$, alors le canal est stable : (Y_n) est une chaîne de Markov ergodique. Noter que le paramètre δ ne joue aucun rôle.
4. Si $\lambda > \mu$, montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov transiente (le canal est instable).

Exercice 2

Aloha avec deux sources.
On considère un canal avec deux émetteurs 1 et 2, pour $n \geq 1$, l'émetteur 1 reçoit A_n nouveaux messages à la n-ième unité de temps. La suite (A_n) est supposée i.i.d. Chaque émetteur n'essaie de transmettre qu'un message à la fois, les autres étant stockés dans une file d' attente. Le protocole utilisé est Aloha avec le paramètre p (chaque unité de temps, il y a essai avec proba p). On pose $\lambda_1 = \mathbb{E}(A_1)$.

On suppose pour l'instant que l'émetteur 2 a une infinité de messages à envoyer.

1. Si $\lambda_1 < p(1-p)$, alors montrer que le système est stable (on défin ira la notion associée).
2. Montrer que si $\lambda_1 > p(1-p)$ et $\mathbb{E}(A_1^2) < +\infty$, alors le système est instable.

On suppose maintenant que l'émetteur 2 n'est plus saturé mais reçoit B_n nouveaux messages pendant la n-ième unité de temps. La suite (B_n) est i.i.d. et $\lambda_2 = \mathbb{E}(B_1)$.

3. Montrer que le système est stable si $\lambda_1 < p(1-p)$ et $\lambda_2 < p(1-p)$.

Exercice 3

Protocole en arbre à arrivées bloquées.

On se place dans le cadre de l'arbre binaire avec des arrivées poissonniennes. Pour $n \geq 1$, on note W_n le temps de transmission d'un message donné commençant avec n autres messages.

1. Montrer que si $w_n = \mathbb{E}(W_n)$, alors $w_0 = 1$ et si $n \geq 1$,
$$w_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} w_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} r_k,$$
où $r_n = \mathbb{E}(R_n)$ et R_n est le temps total de transmission de n messages.
2. On pose pour $x \geq 0$,
$$w(x) = \sum_{n\geq 0} w_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}, \qquad r(x) = \sum_{n\geq 0} r_n \frac{x^n}{n!} e^{-x},$$
montrer simplement que
$$w(x) = w(x/2) + \frac{1}{2}(r(x/2) - 1) + \frac{3}{2}\left(1 - e^{-x}\right).$$

Exercice 4

Protocole à arrivées bloquées.

On considère le protocole en arbre qui fonctionne par session : la $n+1$-ième session est consacrée à la transmission des messages arrivés pendant la n-ième session. On note L_n le nombre de messages en attente au début de la n-ième session si ce nombre est non nul, sinon on pose $L_n = 1$. Comme dans le cours R_p représente le temps qu'il faut au protocol en arbre pour transmettre p messages quand il n'y a pas d'arrivées.

Les arrivées pendant chaque unité de temps sont supposées indépendantes ayant une distribution de Poisson de paramètre λ.

1. Montrer que (L_n) est une chaîne de Markov irréductible sur $\mathbb{N} - \{0\}$.
2. Montrer que si
$$\lambda < \liminf_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathbb{E}(R_n)},$$
alors la suite (L_n) est une chaîne de Markov ergodique.

Exercice 5

Le protocole Ethernet saturé.

Un message M arrive dans un réseau géré par Ethernet, on suppose qu'en raison d'une source extérieure aucun message n'est transmis. La quantité $B(t)$ désigne la valeur du compteur de ce message à l'instant t. Le système est initialement vide et les arrivées poissonniennes, pour $i \geq 0$ on note $x_i(t)$ le nombre de messages (sans compter M) ayant le compteur égal à i.

1. Montrer que pour $t \geq 1$, $x_0(t)$ et $x_1(t)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.
2. On note T_n le premier instant où le compteur de M vaut n. Montrer que $\mathbb{E}(T_n) = 2^n - 1$.
3. Si G_α est une v.a. géométrique de paramètre α i.e. pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(G_\alpha \geq x) = \alpha^x$, montrer que, lorsque α tend vers 1, la variable $(1-\alpha)G_\alpha$ converge en distribution vers une loi exponentielle de paramètre 1.
4. Montrer que la variable $T_n/2^n$ converge en distribution. *Cela suggère qu'au bout de n étapes le compteur d'une station sous Ethernet est de l'ordre de* $\log_2 n$.