École Polytechnique
Cours de Majeure
Réseaux de Communication,
Algorithmes et Probabilités.

Petite Classe n° 8
Le Mercredi 29 novembre 2006

TCP: Transmission de Données sur Internet

Exercice 1

Le protocole Ethernet saturé.
Un message M arrive dans un réseau géré par Ethernet, on suppose qu'en raison d'une source extérieure aucun message n'est transmis. La quantité $B(t)$ désigne la valeur du compteur de ce message à l'instant t. Le système est initialement vide et les arrivées poissonniennes, pour $i \geq 0$ on note $x_i(t)$ le nombre de messages (sans compter M) ayant le compteur égal à i.

1. Montrer que pour $t \geq 1$, $x_0(t)$ et $x_1(t)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.
2. On note T_n le premier instant où le compteur de M vaut n. Montrer que $\mathbb{E}(T_n) = 2^n - 1$.
3. Si G_α est une variable aléatoire de distribution géométrique de paramètre $1 - \alpha$, montrer que la variable αG_α converge en distribution vers une loi exponentielle de paramètre 1.
4. Montrer que la variable $T_n/2^n$ converge en distribution.

Exercice 2

TCP avec un taux de perte fixe.
On suppose que les pertes de paquets sont indépendantes et qu'un paquet a la probabilité $1 - \theta$ d'être perdu, W_n désigne la taille de la n-ième fenêtre de congestion :

$$\mathbb{P}(W_1 = x + 1 \mid W_0 = x) = \theta^x \text{ et } \mathbb{P}(W_1 = \lfloor x/2 \rfloor \mid W_0 = x) = 1 - \theta^x, \qquad x \geq 0,$$

et $\pi = (\pi_n)$ est sa probabilité invariante sur $\mathbb{N}$.

1. Montrer que si $\beta_n = \pi_n \theta^{-n(n-1)/2}$, alors (β_n) est une suite croissante.
2. Montrer que
$$\pi_n \theta^n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \pi_k (1 - \theta^k) \geq \pi_{2n}(1 - \theta^{2n}) + \pi_{2n+1}(1 - \theta^{2n+1}).$$
3. En déduire que
$$\beta_n \leq \pi_0 \, \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (1 - \theta^k)},$$
et donc que $\pi_n = \beta_n \theta^{n(n-1)/2}$ où (β_n) est une suite croissante bornée.

Exercice 3

TCP sans Slow Start.

On considère une source qui envoie des paquets à travers le réseau. Chaque paquet a une probabilité $1-\exp(-\alpha)$ d'être perdu et les pertes de paquets sont indépendantes. Les envois sont faits de la même façon que TCP à l'aide d'une variable W, la taille de la fenêtre de congestion, qui croît additivement quand il n'y a pas de perte, mais dès qu'il y a une perte la variable W est fixée à 1. On note W_n la taille de la n-ième fenêtre de congestion.

1. Montrer que (W_n) est une chaîne de Markov irréductible et ergodique sur $\mathbb{N}^*$.
2. Si
$$T = \inf\{n \geq : W_n = 1\}$$
donner la fonction génératrice de la probabilité invariante de (W_n) en fonction de celle de T.
3. Donner l'asymptotique du débit, $\mathbb{E}(W_\infty)$, quand α tend vers 0.

Exercice 4

Extension continue de l'algorithme AIMD. Le processus sur $\mathbb{R}_+$ est la solution d'une équation différentielle déterministe perturbée par des sauts aléatoires. Si $X(0)=x$, jusqu'à l'instant H_x du saut, le processus est déterminé par $X(t)=y(x,t)$ où $(y(t,x))$ est la solution de l'équation différentielle $y' = F(y)$ avec $y(0)=x$ et F est une fonction >0 sur $\mathbb{R}_+$. L'instant H_x est défini comme
$$H_x = \inf\{u \geq 0 : \int_0^u X(v)\,dv = E_1\}$$
où E_1 est une variable exponentielle. À l'instant $t = H_x$, le processus saute en $X(t)=\delta X(t-)$.

1. Si $F(u)\equiv 1$, à quoi correspond le processus $(X(t))$ associé ?
2. Calculer la loi de H_x.
3. Si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ bornée ainsi que sa dérivée, calculer la limite suivante
$$\Omega(f)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\mathbb{E}\left(f(X(h)) - f(x) \mid X(0)=x\right).$$