École Polytechnique
Cours de Majeure
Réseaux de Communication,
Algorithmes et Probabilités.

Petite Classe n° 9
Le Mercredi 6 décembre 2006

Modélisation d'Internet: un aperçu

Exercice 1

La file d'attente avec service au hasard.
Pour cette file d'attente, à la fin de chaque service, le serveur choisit au hasard parmi les clients présents celui qu'il sert ensuite. La distribution des services est exponentielle de paramètre μ.

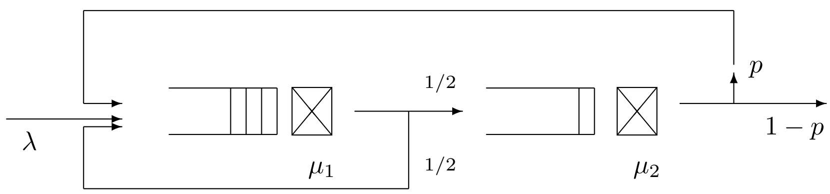
1. On suppose qu'initialement n clients sont présents et qu'il n'y a pas de nouvelles arrivées.
   – Calculer $\mathbb{E}(L(t))$ si $L(t)$ est le nb de clients à l'instant t.
   – Quelle est la transformée de Laplace du temps de séjour d'un client donné ?

À partir de maintenant les arrivées sont Poisson d'intensité λ et la file d'attente a $(n+1)$ clients initialement, un de ces clients est noté A. On pose T_n le temps de séjour (fini ou infini) de A.

2. Quelle est la loi du nombre de clients qui arrivent pendant un service ?
3. Montrer que si $\lambda < \mu$ alors la variable T_A est finie avec probabilité 1.
4. Montrer que si $n \geq 1$, alors on a l'identité
$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{\mu} + \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(T_{n+k-1}) \rho^k (1-\rho).$$

Exercice 2

On considère le réseau de deux files d'attente ci-dessous. Les clients entrent suivant un processus de Poisson de paramètre λ. Dans la première [resp. deuxième] file les clients reçoivent des services exponentiels de paramètre μ_1 [resp. μ_2]. À la sortie de la deuxième file les clients quittent définitivement le réseau avec probabilité $1-p$ ou reviennent à la file 1 pour effectuer un nouveau tour. On note $X_i(t)$ $i = 1, 2$ le nombre de clients de la file i à l'instant t.



1. Écrire les équations de trafic de ce réseau. En déduire les conditions de stabilité.
2. Si le réseau est stable, donner la mesure invariante du processus de Markov $(X_1(t), X_2(t))$.
3. On suppose qu'il n'y a plus d'arrivées extérieures, que N clients sont présents et que les clients à la sortie de 2 vont en 1 avec proba p et en 2 avec proba $1-p$. Donner la probabilité invariante de ce nouveau réseau.

Exercice 3

Algorithmes AIMD et MIMD. On considère une chaîne de Markov (X_n) sur $\mathbb{N}$ dont les transitions sont données par, si $x > 0$,

$$x \longrightarrow \begin{cases} a(x) & \text{avec proba } \alpha \\ \lfloor x/2 \rfloor & \text{———} \quad 1-2\alpha \\ x+1 & \text{———} \quad \alpha, \end{cases}$$

et de 0 la chaîne va en 1 avec probabilité 1, où $(a(x))$ est une suite de $\mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1/2[$ et $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière de $y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible.
2. Si $a(x) = x + 2$, montrer que cette chaîne de Markov est toujours ergodique.

   Pour la suite on suppose que $a(x) = 2x$ pour tout $x > 0$.
3. Si $\alpha < 1/3$, montrer que la chaîne de Markov est ergodique et qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ et $\gamma > 0$ tels que pour tout x suffisamment grand $\mathbb{E}(T|X_0 = x) \leq \log(x)/\gamma$, où $T = \inf\{n \geq 1; X_n \leq K\}$.
4. Montrer que la chaîne de Markov est transiente si $\alpha > 1/3$.

Exercice 4

Nombre de branches dans une évolution aléatoire d'arbres.

Une *feuille* est une branche terminale, sans descendants, d'un arbre. Informellement, si l'arbre au temps $n \in \mathbb{N}$ est vide (sans branches, reduit à la racine) alors l'arbre au temps $n + 1$ comporte deux feuilles avec probabilité $p > 0$ et est vide avec probabilité $1 - p > 0$; sinon, l'arbre au temps $n + 1$ s'obtient à partir de l'arbre au temps n en prenant la feuille la plus à gauche de ce dernier et soit en y ajoutant deux feuilles avec probabilité p soit en la supprimant avec probabilité $1 - p$. Soit X_n le nombre total de branches de l'arbre au temps n, avec $X_n = 0$ si l'arbre est vide.

La seule donnée que l'on utilisera est que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, de matrice de transition $P = (p(x, y))_{x,y\in\mathbb{N}}$ avec $p(x, x + 2) = p > 0$ pour $x \geq 0$ et $p(0, 0) = p(x, x - 1) = 1 - p > 0$ pour $x \geq 1$, les autres termes étant nuls.

1. Montrez que P est irréductible et apériodique sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer que si $p < 1/3$ alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ergodique et si $p > 1/3$ alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente.

   Pour $y \geq 0$ on pose $S_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$, et on note pour x dans $\mathbb{N}$
   $$f_x = \mathbb{P}_x(S_0 < +\infty) \in [0, 1]\,, \qquad m_x = \mathbb{E}_x(S_0) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\,.$$
   Attention : on utilise les conventions habituelles de multiplication et d'addition dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
3. Montrer que S_y est un temps d'arrêt pour $y \geq 0$, et que $f_0 = 1$ et $m_0 = 0$.
4. Montrer que $f_x = f_1 f_{x-1}$ et $m_x = m_1 + m_{x-1}$ pour $x \geq 1$; on pourra considérer S_{x-1} et $S_{x-1,0} = S_0 - S_{x-1}$. En déduire que $f_x = {f_1}^x$ et $m_x = x m_1$ pour x dans $\mathbb{N}$.
5. Montrer que pour $x \geq 1$ on a $f_x = p f_{x+2} + (1 - p) f_{x-1}$ et que $m_x = 1 + p m_{x+2} + (1 - p) m_{x-1}$. On pourra remarquer qu'alors $S_0 = 1 + S_0^1$ où $S_0^1 = \inf\{m \geq 0 : X_{1+m} = 0\}$.
6. Montrer que pour $x \geq 1$ on a
   $$f_x = 1 \text{ pour } p \leq 1/3\,, \quad f_x = \left(\frac{-1 + \sqrt{4/p - 3}}{2} \right)^x \text{ pour } p > 1/3\,.$$
7. Montrer que pour $x \geq 1$ on a $m_x = x/(1 - 3p)$ pour $p < 1/3$ et $m_x = +\infty$ pour $p \geq 1/3$. Interpréter.