

Série Sciences économiques et sociales

Épreuves communes d'admissibilité

SESSION 2021

---

**COMPOSITION FRANÇAISE**

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon

DURÉE : 6 heures

---

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*

Il y a peu, je lisais dans un quotidien l'entretien d'un écrivain très officiel, pour ainsi dire bien assis dans sa position d'écrivain, du genre qui a toujours à dire sur tout et participe volontiers à la vie publique. Et voilà que le même écrivain, tandis qu'on lui demande pourquoi il écrit, dans un moment d'épanchement, ouvre son cœur au journaliste et lui dit : « J'écris parce que j'ai peur de devenir fou. » Louable confiance et sans nul doute sincère, mais c'est seulement que ce n'est pas là le problème : tout le monde en toute matière s'active à ne pas devenir fou, qu'on joue au football ou qu'on écrive des livres. Le problème est exactement contraire : qu'on sache cohabiter avec elle, la folie, qu'on sache la laisser affleurer hors de toute camisole. C'est seulement si on se tient aussi près du tragique qu'on a le droit d'envisager l'art comme médecine [...].

Tanguy Viel, *Icebergs*, Éditions de Minuit, 2019, p. 53-54.

*En vous appuyant sur des exemples littéraires précis et variés, sans vous restreindre à un genre en particulier, vous commenterez et discuterez ce propos.*

SESSION 2021

---

**COMPOSITION DE PHILOSOPHIE**

---

Sujet commun : ENS Ulm - Lyon – Paris-Saclay

DURÉE : 6 heures

---

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*

Que nous enseignent nos peurs ?

**UHC 152**

SESSION 2021

---

**COMPOSITION D'HISTOIRE CONTEMPORAINE**

---

Sujet commun : ENS Ulm - Lyon – Paris-Saclay

DURÉE : 6 heures

---

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*

Les Français et l'empire colonial 1870 - 1988

SCIENCES SOCIALES

Sujet commun ENS Ulm, Lyon, Paris-Saclay, ENSAE/INSEE/ENSAI

Durée : 6 heures

*Aucun document n'est autorisé.*

*Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table et le poste de travail.*

Le sujet comporte 10 pages

SUJET

**Qu'est-ce qu'une offre d'emploi acceptable ?**

**Tournez la page S.V.P.**

## Document 1a – Le projet personnalisé d'accès à l'emploi, [www.pole-emploi.fr](http://www.pole-emploi.fr)

« En tant que demandeur d'emploi, vous êtes tenu(e) de définir et actualiser votre projet personnalisé d'accès à l'emploi (PPAE) en commun avec votre conseiller Pôle Emploi. En cas de refus d'élaborer ou actualiser votre PPAE, sans motif légitime, vous pouvez faire l'objet d'une radiation des listes des demandeurs d'emploi ainsi que d'une suppression d'une partie de votre allocation si vous êtes indemnisé(e).

Lors de l'élaboration et de l'actualisation de votre PPAE, vous définissez les critères de l'emploi que vous recherchez ; ces critères constituent l'offre raisonnable d'emploi correspondant à votre profil et dont les éléments sont :

- la nature et les caractéristiques de l'emploi que vous recherchez ;
- la zone géographique privilégiée ;
- le salaire attendu.

Vous êtes tenu(e) d'accepter les offres raisonnables d'emploi, sans toutefois devoir accepter :

- un niveau de salaire inférieur au salaire normalement pratiqué dans votre région et pour la profession concernée. Par ailleurs, le salaire de l'offre proposée ne peut être inférieur aux dispositions légales et conventionnelles en vigueur et notamment le SMIC ;
- un emploi à temps partiel, si votre PPAE prévoit une recherche d'emploi à temps plein ;
- un emploi qui n'est pas compatible avec vos qualifications et compétences professionnelles.

En cas de deux refus d'offres raisonnables d'emploi sans motif légitime, vous pouvez faire l'objet d'une décision de radiation de la liste des demandeurs d'emploi ainsi que d'une suppression de votre allocation si vous êtes indemnisé(e). »

<https://www.pole-emploi.fr/candidat/pole-emploi-et-vous/le-projet-personnalise-dacces-a.html>

## Document 1b – Répartition des sorties du chômage par motif

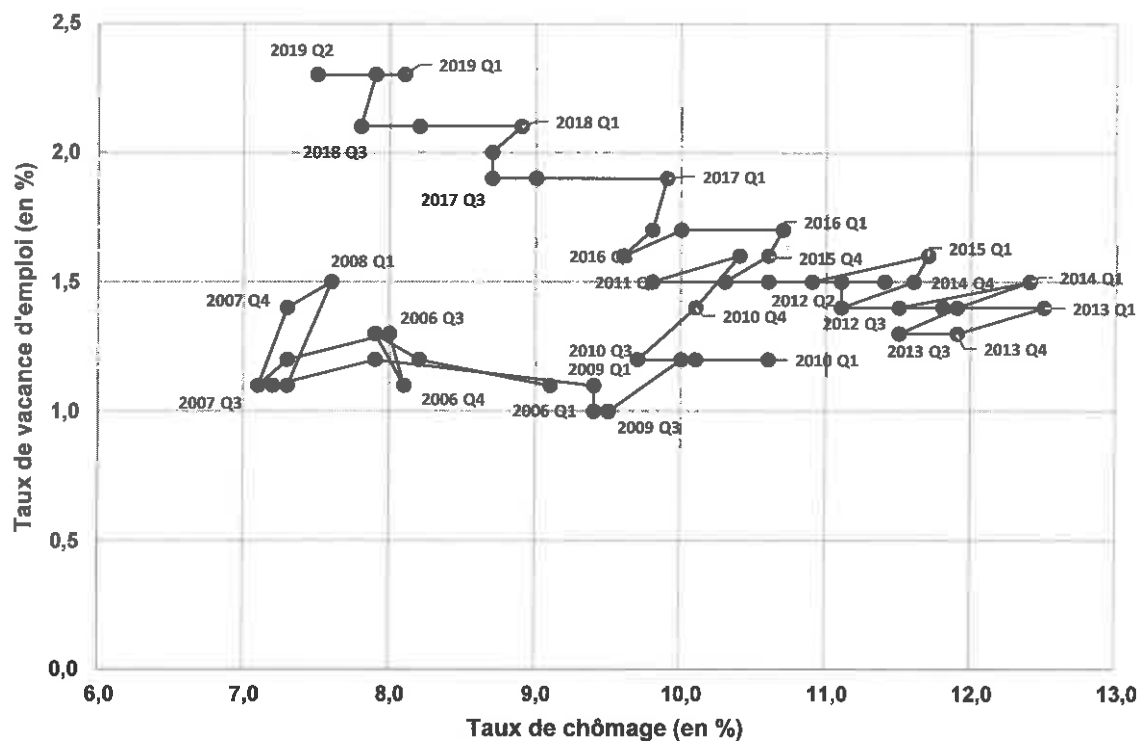
|   | 2007           | 2010           | 2017           | 2018           |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Reprise d'emploi                            | 58,0%          | 53,8%          | 53,7%          | 52,7%          |
| Formation                                   | 16,9%          | 17,5%          | 20,8%          | 24,4%          |
| Arrêt de recherche d'emploi temporaire      | 8,0%           | 8,2%           | 7,7%           | 7,9%           |
| Non renouvellement motivé de la demande     | 3,0%           | 3,2%           | 3,0%           | 2,9%           |
| Non renouvellement accidentel de la demande | 5,3%           | 8,5%           | 7,5%           | 6,6%           |
| Fin d'activité                              | 2,5%           | 1,5%           | 1,7%           | 1,9%           |
| Radiation administrative                    | 2,2%           | 1,7%           | 1,3%           | 0,8%           |
| Autre motif de sortie                       | 2,2%           | 1,7%           | 1,3%           | 0,8%           |
| <b>Total</b>                                | <b>464 697</b> | <b>486 367</b> | <b>556 796</b> | <b>556 102</b> |

*Champ* : demandeurs d'emploi de catégories A, B et C, en France métropolitaine.

*Lecture* : en 2018, les radiations administratives constituaient 0,8 % des sorties du chômage.

*Source* : Dares – Pôle emploi, STMT et enquête Sortant.

**Document 2 – Courbe de Beveridge pour la zone euro, en données trimestrielles, de 2006 à 2019**



*Lecture* : au 4<sup>e</sup> trimestre 2007 (2007 Q4), le taux de chômage en zone euro était de 7,3 % pour un taux de vacance d'emploi de 1,4 %.

*Champ* : données de vacances d'emploi pour le secteur de l'industrie, la construction et les services en zone euro (19 pays) ; données de chômage sur la population de 15 à 74 ans.

*Source* : Eurostat.

### Document 3a – Répartition des navetteurs en fonction de la distance entre leur domicile et leur lieu de travail, en pourcentages

| Distance domicile/travail | 1999 | 2013 |
|---------------------------|------|------|
| Moins de 10 km            | 38,7 | 33,7 |
| De 10 à moins de 20 km    | 29,8 | 30,5 |
| De 20 à moins de 30 km    | 14,3 | 16,0 |
| De 30 à moins de 50 km    | 10,6 | 12,5 |
| De 50 à moins de 100 km   | 5,2  | 5,8  |
| 100 km ou plus            | 1,4  | 1,5  |

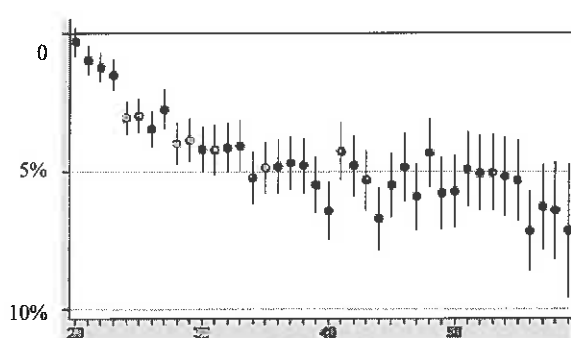
*Note* : la distance domicile-travail est définie comme la distance entre la commune de résidence (localisée à la mairie de commune) et la commune de travail (localisée à la mairie de commune). Est considéré comme navetteur tout actif occupé qui travaille dans une commune différente de la commune de résidence.

*Champ* : navetteurs résidant et travaillant en France, pour une distance inférieure à 200 km.

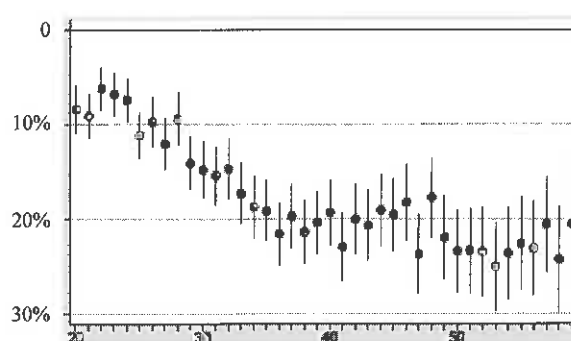
*Source* : Insee, recensements de la population de 1999 et de 2013.

### Document 3b – Salaire de réserve et distance domicile-travail acceptables en fonction du genre

a) Différences de genre en matière de salaire de réserve (en ordonnée), par âge (en abscisse)



b) Différences de genre en matière de distance domicile-travail acceptée (en ordonnée), par âge (en abscisse)



*Note* : cette enquête utilise le fichier historique de Pôle emploi qui recense pour chaque demandeur d'emploi le salaire de réserve qu'il déclare lors de son inscription ainsi que la distance maximale qu'il accepte de parcourir entre son domicile et son futur lieu de travail. Ces données contrôlent pour les caractéristiques du dernier emploi observé, notamment le salaire, la PCS d'origine, le nombre d'heures travaillées, le type de contrat de travail, etc.

*Lecture* : un écart négatif signifie que (a) le salaire de réserve des femmes est inférieur à celui des hommes et (b) les femmes acceptent une distance domicile-travail inférieure à celle des hommes. À 30 ans, le salaire de réserve des femmes est inférieur de 4 % par rapport à celui des hommes ; à 50 ans, cet écart est de 6 %.

Thomas Le Barbanchon, Roland Rathelot et Alexandra Roulet, « Différences de genre dans la recherche d'emploi : arbitrer entre trajet et salaire », *Working Paper*, 2019.



#### **Document 4 – Les aides à domicile, des femmes qui ont toujours travaillé**

Ces femmes [les aides à domicile] occupent un travail qui, pour le pôle stable des classes populaires auquel elles appartiennent, ne semble pas pouvoir procurer de formes de légitimité professionnelle et sociale. Lorsqu'elles parlent avec plaisir et en positif du monde du travail, il s'agit de celui de leurs pères (elles sont fières d'eux, qui ont été ouvriers qualifiés et pour qui le travail, « c'était tout ») ou bien des emplois d'ouvrières ou d'employées qu'elles ont eus par le passé. Pour certaines d'entre elles, un bon travail est celui qu'elles avaient avant d'entrer dans l'aide à domicile : un travail qui « paye bien », qui renvoie à un métier, à des savoir-faire (plusieurs d'entre elles ont suivi des formations initiales ou continues spécialisées). Pour toutes, c'est un travail où il y a « une ambiance », où les « rigolades » sont possibles. [...] La façon dont elles mettent à distance leur travail dans les discours ne tient pas complètement à son contenu : il y a des aspects de ce travail qu'elles aiment. Et, comme elles le disent, elles se « sentent utiles » en tant qu'aides à domicile. Mais pour ces femmes qui continuent à entretenir des relations concrètes et quotidiennes avec leur milieu social d'origine, la définition symbolique de ce travail rejaillit sur la manière dont elles-mêmes le présentent et se le représentent. Il est aux antipodes du travail ouvrier : absence de savoir-faire reconnus, isolement des collectifs de travail, absence de figure patronale bien identifiable favorable à l'émergence de résistances collectives. Pour ces femmes originaires des fractions les plus stables des classes populaires, le travail d'aide à domicile représente, semble-t-il, une figure repoussoir du « bon travail ».

Pour bien situer ce travail dans l'univers de ces femmes, il faut toutefois s'arrêter sur un point important : elles sont acquises à un trait important de leur milieu social, mais qui semblait jusque dans les années 1980 ne concerner que les hommes : la « norme du travail » ou encore de l'emploi. Ces femmes ne valorisent pas leur travail dans les discours mais n'envisagent pas de le quitter, elles tiennent à leur emploi. Qu'elles soient nées dans les années 1940-1950 ou dans les années 1970, toutes sont concernées par ce trait. En entretien, elles insistent pour dire qu'elles ont « toujours » travaillé, y compris lorsque je leur fais remarquer que leur trajectoire professionnelle comporte des périodes d'inactivité. Monique Vogler (60 ans) s'est retirée du marché du travail après la naissance de ses jumelles, mais lorsque je le souligne, elle me rétorque : « N'empêche, j'ai toujours travaillé. » Cette aide à domicile et plusieurs de ses collègues ont en effet continué à travailler au noir tout en élevant leurs jeunes enfants. Elles faisaient du ménage, gardaient des enfants ou encore effectuaient des remplacements comme

vendeuses dans de petits commerces. Certaines emmenaient leurs enfants, d'autres les faisaient garder par les aînés ou s'arrangeaient avec une voisine. [...]

Quelle que soit l'exactitude des faits rapportés concernant leur parcours sur le marché du travail et les projets initiaux qu'elles ont pu avoir, on retiendra qu'elles tiennent à ce que l'enquêtrice les voie comme des femmes qui ont toujours travaillé. Au début des années 2000, le choix de s'arrêter de travailler après un mariage semble devenu illégitime pour ces femmes, au point de retentir sur leurs récits professionnels. J'ai demandé à certaines si elles seraient prêtes à s'arrêter de travailler après un beau mariage : elles répondent par la négative sans hésitation et citent en exemple leur collègue Véra Pijeki, mariée à un artisan de Mervans dont l'entreprise est florissante. Elle trouve son travail « dur » et « mal payé », pourtant, et malgré l'insistance de son mari, elle refuse d'arrêter l'aide à domicile.

Christelle Avril, *Les aides à domicile : un autre monde populaire*, La Dispute, 2014, pp. 132-135.

**Document 5 – Revenu salarial annuel moyen en 2016, en euros courants, et volume de travail moyen en équivalent temps plein**

|                                       | Revenu salarial net moyen | Salaire annuel moyen en équivalent temps plein | Volume de travail moyen en équivalent temps plein |
|---------------------------------------|---------------------------|--|---|
| <b>Ensemble</b>                       | 20 730                    | 27 010   | 0,77  |
| <b>Sexe</b>                           |                           |  |   |
| Femmes                                | 17 950                    | 24 290   | 0,74  |
| Hommes                                | 23 420                    | 29 450   | 0,80  |
| <b>Âge</b>                            |                           |  |   |
| Moins de 25 ans                       | 7 480                     | 16 880   | 0,44  |
| 25 à 39 ans                           | 19 160                    | 23 910   | 0,80  |
| 40 à 49 ans                           | 24 870                    | 29 110   | 0,85  |
| 50 à 54 ans                           | 26 120                    | 30 190   | 0,87  |
| 55 ans ou plus                        | 24 660                    | 32 120   | 0,77  |
| <b>Diplôme</b>                        |                           |  |   |
| Sans diplôme                          | 14 590                    | 19 970   | 0,73  |
| CAP, BEP ou moins                     | 17 510                    | 22 270   | 0,79  |
| Bac                                   | 19 780                    | 24 070   | 0,82  |
| Bac +2                                | 24 760                    | 28 470   | 0,87  |
| Bac +3 ou plus                        | 35 000                    | 39 760   | 0,88  |
| <b>Catégorie socioprofessionnelle</b> |                           |  |   |
| Cadres <sup>1</sup>                   | 41 200                    | 46 600   | 0,88  |
| Professions intermédiaires            | 22 760                    | 27 180   | 0,84  |
| Employés                              | 13 710                    | 19 890   | 0,69  |
| Ouvriers                              | 15 110                    | 20 370   | 0,74  |
| <b>Conditions d'emploi</b>            |                           |  |   |
| Temps complet                         | 26 970                    | 28 440   | 0,91  |
| Temps partiel                         | 10 830                    | 21 980   | 0,49  |
| <b>Secteur</b>                        |                           |  |   |
| Secteur privé                         | 20 380                    | 27 050   | 0,75  |
| Fonction publique                     | 21 980                    | 26 870   | 0,82  |

<sup>1</sup> Cadres, y compris chefs d'entreprise salariés.

*Note* : le revenu salarial est calculé sur l'ensemble des salariés, tandis que la décomposition en salaire équivalent temps plein et en volume de travail n'est réalisée que sur les individus pour lesquels on peut calculer un volume de travail en équivalent temps plein. La catégorie socioprofessionnelle, la condition d'emploi et le secteur sont relatifs au poste principal du salarié.

*Lecture* : dans l'ensemble, les salariés ont un volume de travail équivalent à 77% d'un temps plein annuel.

*Champ* : France hors Mayotte, ensemble des salariés hors salariés agricoles et apprentis stagiaires, hors salaires versés par des particuliers employeurs.

*Source* : panel Tous salariés.

Insee, *France Portrait social*, Insee Références, Edition 2019.

## Document 6 – Allocations chômage, durée passée au chômage et qualité des emplois

Entre 2000 et 2002, le système français d'assurance chômage accordait aux personnes ayant travaillé pendant plus de huit mois au cours de l'année précédant leur période de chômage huit mois supplémentaires d'indemnisation. Notre étude analyse l'effet de l'augmentation de la période d'indemnisation sur la qualité de l'emploi trouvé à l'issue de cette période.

Il existe une importante littérature empirique sur les effets de l'assurance chômage. Si l'on met de côté la dimension purement assurantielle, cette littérature se concentre principalement sur la manière dont l'assurance chômage influence les transitions sur le marché du travail entre le chômage et l'emploi. Lorsque les indemnités chômage sont plus généreuses, le salaire de réserve peut augmenter et/ou l'effort de recherche décroître. Ces deux mouvements ont tendance à faire baisser le taux de sortie du chômage vers l'emploi. Mais il est également possible que des indemnités chômage plus généreuses affectent la qualité des appariements<sup>1</sup>, soit positivement si ces indemnités encouragent les demandeurs d'emploi à attendre que des emplois plus productifs leur soient proposés, soit de manière négative si le capital humain se déprécie au cours de la période de chômage ou si le temps passé au chômage est utilisé comme un facteur discriminant par les employeurs potentiels. [...]

La plupart des études récentes [...] ne trouvent pas d'effet sur la qualité moyenne des appariements. Notre étude confirme ce résultat général et montre qu'il s'applique particulièrement aux demandeurs d'emploi les moins susceptibles de réintégrer le marché du travail. Nous trouvons en revanche un effet positif massif d'une assurance chômage plus généreuse sur le temps passé au chômage. Nos résultats sont d'autant plus importants qu'ils concernent les demandeurs d'emploi dont les chances de retrouver un emploi sont les plus faibles (ces demandeurs d'emploi ont travaillé au plus un an pendant les deux dernières années précédant la hausse des indemnités chômage que nous étudions). Cela va à l'encontre de l'idée selon laquelle ce sont justement ces demandeurs d'emploi qui devraient le plus profiter d'un accroissement des indemnités chômage. Cette théorie comporte deux arguments. D'une part on pourrait penser que l'extension de la période d'indemnisation aurait permis à ces demandeurs d'emploi d'augmenter leur qualification et d'acquérir les capacités de recherche d'emploi qui leur font défaut, or ce n'est pas le cas. D'autre part, dans la mesure où ces demandeurs d'emploi sont aussi les plus susceptibles d'être contraints financièrement, on

---

<sup>1</sup> Telle que définie par l'auteur, à savoir la durée et le salaire horaire du premier emploi trouvé après la période de chômage.

aurait pu penser que l'accroissement des indemnités chômage aurait affecté positivement la valeur qu'ils attachent au chômage et, de ce fait, leur salaire de réserve, or ce n'est pas le cas. Nos résultats sont d'autant plus précis que nous estimons l'effet d'un accroissement très important de la générosité de l'assurance chômage. Entre 2000 et 2002, le système français d'assurance chômage accordait aux personnes ayant travaillé pendant plus de huit mois au cours de l'année précédant leur période de chômage huit mois supplémentaires d'indemnisation : pour les personnes concernées, ces huit mois supplémentaires représentent un doublement de la période normale d'indemnisation. Cette augmentation importante confère à nos résultats un poids particulier : étant donnée l'ampleur de la réforme, on se serait en effet attendu à observer des effets non-négligeables. Or l'absence d'effet positif sur la qualité des appariements est d'autant plus frappante qu'elle s'accompagne d'une diminution du taux de sortie du chômage. Les demandeurs d'emploi qui ont vu s'accroître leur durée d'indemnisation mettent en moyenne 2,5 mois de plus à trouver un emploi. [...] Malgré cela, ces demandeurs d'emploi ne semblent pas trouver de meilleur emploi à l'issue de leur période de recherche.

Thomas Le Barbanchon, « L'effet de la durée potentielle de perception des allocations chômage sur la sortie du chômage et la qualité de l'emploi en France », *Labor Economics*, 2016.

## Document 7 – La grande entreprise, la petite entreprise, et la précarité

Ces trois jeunes se trouvent tous dans une situation extrêmement difficile. Depuis juillet 90, date où leur contrat qui les liait à Peugeot n'a pas été renouvelé, ils n'ont eu que des contrats de quelques semaines dans diverses entreprises, acceptant tous les travaux qu'on leur proposait. Depuis la guerre du Golfe, les grandes comme les petites entreprises ont presque complètement cessé d'embaucher des intérimaires. Inscrits à l'ANPE<sup>2</sup>, ils n'ont pas trouvé de travail depuis deux ou trois mois et ont perdu tout espoir de trouver un emploi dans la région au mois d'août, attendant sans illusion la rentrée de septembre. Ils savent qu'en ayant raté 18 mois plus tôt leur embauche chez Peugeot, ils ont perdu une chance unique de décrocher un emploi stable. S'ils se sont « accrochés » à la région de Montbéliard, c'est parce que, au fond, ils ont le sentiment vague qu'ils ne trouveront pas mieux ailleurs et espèrent, sans trop y croire, une reprise. [...]

Dans un premier temps, Lucien a essayé d'imposer de lui-même une image moins négative que celle du « jeune précaire » – instable, peu qualifié, peu sérieux dans le travail – comme pour se démarquer des ouvriers non qualifiés ou des chômeurs volontaires [...]. A Sochaux, il avait découvert l'univers de la grande entreprise. Là, on prenait en compte ses capacités et il avait alors entrevu la possibilité d'échapper à cette main d'œuvre interchangeable, taillable et corvéable à merci, de ne plus être l'« intérimaire » qui fait le « sale boulot », que l'on déplace à volonté, et qui subit sans rien dire. Là, il était considéré et respecté dans son travail, aussi peu qualifié fût-il. [...] C'est que Peugeot le protégeait, non pas du chômage qu'il a appris à intégrer dans son horizon social et mental comme une espèce de mal inévitable, mais de l'arbitraire, celui auquel sont soumis les intérimaires dans les « petites boîtes ». Peugeot, par sa taille, lui procurait une capacité supplémentaire de négociation face à l'agence d'intérim qui reste, à ses yeux, l'ennemi, parce que l'instrument de l'« exploitation ». Les transformations récentes du marché du travail, et plus précisément la prolifération de ces petites entreprises, plus ou moins sous-traitantes de la grande, qui sont prêtes à employer les jeunes dans n'importe quelles conditions, contribuent à produire une sorte de vision « enchantée » de la grande entreprise. C'est pourquoi Lucien, comme les autres « précaires », avait tendance à prendre au sérieux les propositions faites par l'entreprise [Peugeot] (responsabiliser, prendre des initiatives, faire des suggestions, jouer le jeu de la qualité, etc.).

Stéphane Beaud, « Le rêve de l'intérimaire », in *La misère du monde*, sous la direction de Pierre Bourdieu, 1993.

---

<sup>2</sup> Agence Nationale Pour l'Emploi, rebaptisée Pôle Emploi en 2008 après sa fusion avec les Assédic.

SESSION 2021

---

**COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

---

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

*L'usage de la calculatrice est interdit.*

**Tournez la page S.V.P.**

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

\*\*\*

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

\*\*\*

Il est demandé de soigneusement numéroté les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandée.

\*\*\*

## PROBLÈME A.

Dans tout le problème,  $\varepsilon$  désigne un nombre réel tel que  $0 < \varepsilon < 1$ . Nous notons la limite à droite d'une fonction  $f$  en un point  $a$  par  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . Les notations alternatives usuelles  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  sont tolérées.

(1) (1a) Que vaut  $I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$ ?

(1b) Calculer la limite  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} I(\varepsilon)$ .

(1c) Justifier que  $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = - \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$ .

(1d) En déduire la valeur de  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right)$ .

(2) Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue.

(2a) À l'aide du changement de variable  $y = -x$ , montrer que

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx.$$

(2b) Dans le cas où  $f$  est de plus impaire, montrer que

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2 \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx.$$

(3) Soit  $a$  un réel strictement positif et  $f_a$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geq 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



(3a) Montrer que  $f_a$  est continue et impaire.

(3b) Montrer que  $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{f_a(x)}{x} dx = \frac{2 - 2\varepsilon^a}{a}$ .

(3c) Calculer  $I(a) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{f_a(x)}{x} dx \right)$ , puis  $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} I(a)$ .

(3d) En déduire qu'il n'existe pas de constante  $C$  telle que, pour toute fonction continue  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ , on ait

$$\left| \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{g(x)}{x} dx \right) \right| \leq C \sup_{x \in [-1, 1]} |g(x)|.$$

(4) Soit  $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(4a) Justifier qu'il existe  $y_0 \in [-1, 1]$  tel que  $|h'(y_0)| = \max_{y \in [-1, 1]} |h'(y)|$ .

(4b) Justifier que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $|h(x) - h(-x)| \leq 2x \max_{y \in [-x, x]} |h'(y)|$ .

(4c) Montrer que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,

$$\int_{\varepsilon}^1 \left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| dx \leq 2 |h'(y_0)|.$$

(4d) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de terme général  $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| dx$  admet une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

(5) Soit  $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(-x)}{x} = 2h'(0)$ .

## PROBLÈME B.

(6) Pour cette question, soient  $v_1 = (1, -1, 0)$ ,  $v_2 = (-1, -2, 1)$  et  $v_3 = (2, 0, 3)$ .

(6a) Montrer que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  forme une base de  $\mathbf{R}^3$ .

(6b) Montrer que  $H = \{x \in \mathbf{R}^3 : \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2, x = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$ .

Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  et tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on définit le vecteur  $u_{i,j} = v_i - v_j$ . On note  $E_3$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  engendré par la famille  $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ .

(6c) Donner la liste des vecteurs  $u_{i,j}$  pour  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$ .

(6d) Que vaut  $\dim(E_3)$ ?

Dans toute la suite du problème,  $n \geq 1$  désigne un entier naturel quelconque et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  tels que la famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  forme une base de  $\mathbf{R}^n$ .

- (7) Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on définit  $w_{i,j} = v_i - v_j$ . On note  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par la famille  $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ . Le but de cette question est de trouver la dimension de  $E$ .
- (7a) Montrer que  $w_{i,j}$  est le vecteur nul si et seulement si  $i = j$ .
- (7b) Justifier que  $E$  est de dimension inférieure ou égale à  $n$ .
- (7c) Montrer que la famille  $(w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \dots, w_{1,n})$  forme une famille libre de  $\mathbb{R}^n$ .
- (7d) Soient  $i$  et  $j$  deux entiers dans  $\{1, \dots, n\}$ ; exprimer le vecteur  $w_{i,j}$  en fonction des vecteurs  $w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \dots, w_{1,n}$ .
- (7e) Quelle est la dimension de  $E$ ?
- (8) Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on définit  $z_{i,j} = av_i + bv_j$ . On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par la famille  $(z_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ . Le but de cette question est de trouver dans quels cas  $F = \mathbb{R}^n$ .
- (8a) Donner un exemple simple de nombres réels  $a$  et  $b$  pour lequel  $F = \mathbb{R}^n$  et un exemple pour lequel  $F \neq \mathbb{R}^n$ .
- (8b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  et  $b$  pour que la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  soit inversible.
- (8c) On suppose  $a^2 \neq b^2$ . Trouver deux nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\lambda z_{1,2} + \mu z_{2,1} = v_1$ .
- (8d) En déduire que, si  $a^2 \neq b^2$ , alors  $F = \mathbb{R}^n$ .
- (8e) Que pensez-vous du cas  $a^2 = b^2$ ?

## PROBLÈME C.

Ce problème comporte deux parties.

**PARTIE I.** Soit  $n \geq 2$  un entier naturel et soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers  $\{1, 2, \dots, n\}$ . On s'intéresse à la variable aléatoire  $X = \min(X_1, X_2)$ , minimum entre  $X_1$  et  $X_2$ .

- (9) (9a) Que vaut  $P(X_1 = 1)$ , la probabilité de l'évènement  $\{X_1 = 1\}$ ?
- (9b) Calculer  $P(X = n)$ .
- (9c) Montrer que les évènements  $\{X = n\}$  et  $\{X_1 = 1\}$  sont incompatibles.
- (9d) En déduire que  $X$  et  $X_1$  ne sont pas indépendantes.

(10)(10a) Soit  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Montrer que  $P(X \geq k) = \frac{(n - k + 1)^2}{n^2}$ .

(10b) Soit  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ . Que vaut  $P(X = k)$ ?

(11)(11a) Montrer que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

(11b) En déduire la valeur de l'espérance  $E(X_1)$  puis calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X_1)}{n}$ .

(11c) On admet que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Montrer que  $E(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ .

(11d) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X)}{n}$ .

On considère dorénavant deux nombres réels strictement positifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , ainsi que deux variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2$  indépendantes,  $T_1$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1$  et  $T_2$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_2$ . On s'intéresse à  $T = \min(T_1, T_2)$ .

(12)(12a) Pour  $x \in \mathbf{R}$ , que vaut  $P(T_1 > x)$ ?

(12b) Pour  $x \geq 0$ , que vaut  $P(T > x)$ ?

(12c) Quelle est la loi de  $T$ ?

**PARTIE II.** Soit  $m \geq 1$  un entier naturel. Soit  $Y$  une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ . On s'intéresse à la variable aléatoire  $Z$  de loi uniforme sur  $\{1, \dots, Y\}$ . L'ensemble sur lequel  $Z$  est définie est donc aléatoire : par exemple, si la réalisation de  $Y$  donne 3, alors  $Z$  est uniforme sur  $\{1, 2, 3\}$ , tandis que si la réalisation de  $Y$  donne 5, alors  $Z$  est uniforme sur  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , et ainsi de suite.

(13) **Dans cette question seulement**, on suppose qu'il existe un  $k \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $P(Y = k) = 1$ . Quelle est la loi de  $Z$ ? Donner, sans justification, son espérance  $E(Z)$ .

On suppose dans toute la suite que, pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ , on a  $P(Y = k) > 0$ .

(14)(14a) Énoncer la formule des probabilités totales.

(14b) Montrer que, pour tout  $\ell \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=\ell}^m \frac{P(Y = k)}{k}.$$

(14c) Pour  $\ell \in \{1, \dots, m\}$ , montrer que  $P(Z = \ell) \leq \frac{E(Y)}{\ell^2}$ .

(15) **Dans cette question seulement**, on suppose que la loi de  $Y$  est donnée par la formule

$$P(Y = k) = \frac{2k}{m(m+1)} \text{ pour } k \in \{1, \dots, m\}.$$

(15a) Pour  $\ell \in \{1, \dots, m\}$ , que vaut  $P(Z = \ell)$  dans ce cas?

(15b) Pour  $1 \leq \ell \leq k \leq m$ , calculer  $P(Y = k | Z = \ell)$ .

(16)(16a) On considère des nombres réels positifs  $\{a_{k,\ell}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq \ell \leq m\}$ . On considère la double somme  $\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=\ell}^m a_{k,\ell}$ . Recopier le tableau ci-dessous en cochant ou

noircissant les cases correspondant aux indices  $k$  et  $\ell$  pour lesquels le terme  $a_{k,\ell}$  apparait dans cette double somme.

|         | $\ell = 1$ | $\ell = 2$ | $\ell = 3$ | $\ell = 4$ | $\ell = m$ |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $k = 1$ |            |            |            |            |            |
| $k = 2$ |            |            |            |            |            |
| $k = 3$ |            |            |            |            |            |
| $k = 4$ |            |            |            |            |            |
| $k = m$ |            |            |            |            |            |

Expliquer pourquoi  $\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=\ell}^m a_{k,\ell} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^k a_{k,\ell}$ .

(16b) Montrer que  $E(Z) = \sum_{k=1}^m P(Y = k) \frac{k+1}{2}$ .

(16c) Exprimer l'espérance de  $Z$  en fonction de celle de  $Y$ .

(16d) Est-il possible d'exprimer la variance de  $Z$  uniquement en fonction de la variance de  $Y$  ?

On suppose dorénavant que  $Y$  est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble  $\mathbf{N}^*$  des entiers naturels strictement positifs, telle que  $Y - 1$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On suppose toujours que  $Z$  est une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\{1, \dots, Y\}$ .

(17)(17a) Pour  $k \in \mathbf{N}^*$ , que vaut  $P(Y = k)$  ?

(17b) Montrer que, pour tout  $\ell \in \mathbf{N}^*$ ,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{P(Y = k)}{k}$$

(17c) Calculer  $P(Z = 1)$ .