

Série Sciences économiques et sociales

Épreuves communes d'admissibilité

Session 2022

SESSION 2022

COMPOSITION FRANÇAISE

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon

DURÉE : 6 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

À propos du texte littéraire, Georges Perec (« Entretien » [avec Jean-Marie Le Sidaner], *Georges Perec, L'Arc, no 76*, 1979, p. 3-10 ; rééd. Georges Perec, éditions Inculte, 2005, p. 25-39, p. 27), affirme :

« Le texte n'est pas producteur de savoir, mais producteur de fiction, de fiction de savoir, de savoir-fiction. Quand je dis que je voudrais que mes textes soient informés par les savoirs contemporains comme les romans de Jules Verne le furent par la science de son époque, cela veut dire que je voudrais qu'ils interviennent dans l'élaboration de mes fictions, non pas en tant que vérité, mais en tant que matériel, ou machinerie, de l'imaginaire ».

En vous appuyant sur des exemples littéraires précis et variés, sans vous limiter à un genre, vous commenterez et discuterez ce propos.

SESSION 2022

COMPOSITION DE PHILOSOPHIE

Sujet commun : ENS Ulm - Lyon – Paris-Saclay

DURÉE : 6 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'inconnu.

UHC 252

SESSION 2022

COMPOSITION D'HISTOIRE CONTEMPORAINE

Sujet commun : ENS Ulm - Lyon – Paris-Saclay

DURÉE : 6 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Le défi communiste dans le monde (1919-1989)

UHCE 253

SESSION 2022

SCIENCES SOCIALES

Sujet commun ENS Ulm, Lyon, Paris-Saclay, ENSAE/INSEE/ENSAI

Durée : 6 heures

Aucun document n'est autorisé.

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table et le poste de travail.

Le sujet comporte 8 pages

SUJET

Investir dans l'éducation est-il rentable ?

Document 1 – Coûts par élève et par étudiant en France

Évolution des coûts par élève et par étudiant, en euros, aux prix 2019

Niveaux	1980	1990	2000	2005	2010	2015	2018	2019p
Préélémentaire	n.d.	3 700	5 570	5 670	5 990	6 590	7 040	7 110
Élémentaire	n.d.	4 420	5 780	6 030	6 100	6 320	6 780	6 940
Premier degré (1)	3 340	4 170	5 730	5 890	6 060	6 420	6 870	7 000
Formations en collège	n.d.	6 330	8 250	8 680	8 900	8 710	8 850	8 790
Formations générales et technologiques en lycée	n.d.	8 220	11 200	11 040	12 290	11 340	11 270	11 300
Formations professionnelles en lycée	n.d.	10 010	12 550	12 340	13 070	12 660	12 740	12 740
Second degré (2)	6 050	7 270	9 540	9 770	10 350	9 930	10 000	9 950
Premier et second degrés (1) (2)	4 550	5 650	7 570	7 730	8 060	8 060	8 350	8 400
STS	n.d.	n.d.	14 630	15 180	15 040	14 040	14 430	14 270
CPGE	n.d.	n.d.	16 390	16 800	16 540	15 570	15 920	15 710
Universités (3)	n.d.	n.d.	9 160	9 210	11 190	10 770	10 280	10 110
Supérieur (4)	8 620	9 500	10 980	11 180	12 440	11 970	11 690	11 530
Coût moyen tous niveaux	4 840	6 050	8 050	8 240	8 720	8 680	8 900	8 920

► Champ : France métropolitaine + DROM (Mayotte sur toute la série), Public + Privé.

1. Y compris l'enseignement spécial.

2. Y compris l'enseignement spécial et l'apprentissage.

3. Y compris les étudiants des instituts ou écoles internes aux universités.

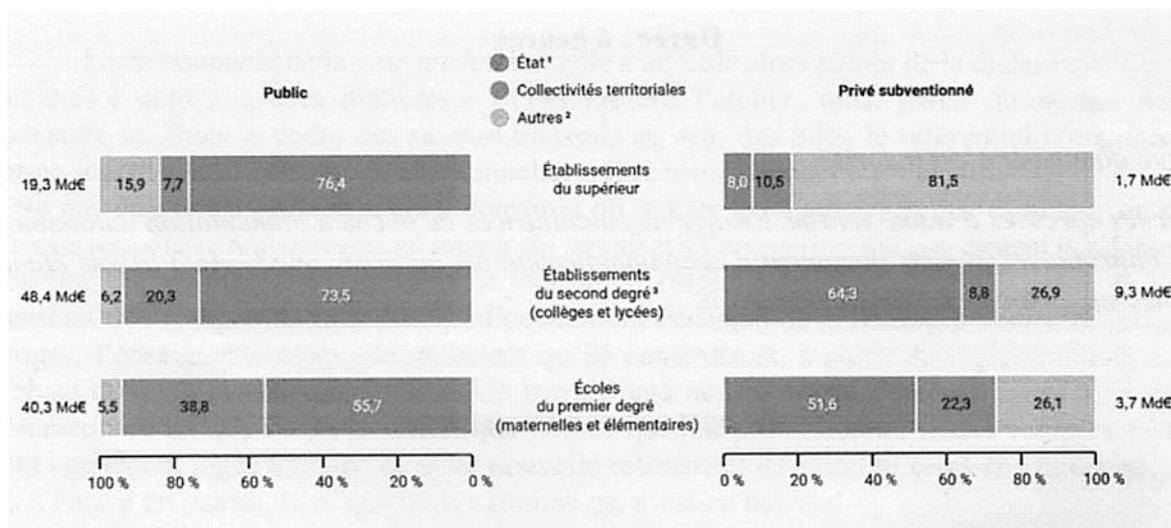
4. Y compris les étudiants des autres écoles du supérieur publiques ou privées (écoles d'ingénieurs, écoles de commerce, etc.) et les apprentis.

© DEPP

STS = Section de technicien supérieur ; CPGE = Classe préparatoire aux grandes écoles

Source : Repères et références statistiques (2021) – Ministère de l'Éducation Nationale

Document 2 – Répartition du financement des établissements publics et privés subventionnés en France selon l'origine en 2018 (en %)



2018 : données provisoires.

1. État = MENJ-MESRI + autres ministères + reste du monde.

2. Autres = autres administrations publiques + entreprises + ménages.

3. Y compris STS et CPGE.

Note : sont considérées ici les établissements produisant directement un service d'enseignement ou recevant des élèves. Les dépenses d'administration et les achats par les ménages de biens et services hors établissements ne sont pas pris en compte.

Champ : France métropolitaine + DOM.

Source : MENJ-MESRI-DEPP, Compte de l'éducation.

Réf. : Note d'Information, n° 19.38. © DEPP

Sigles MENJ = Ministère de l'Éducation Nationale de la Jeunesse et des Sports

MESRI = Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche et l'Innovation

Source : Note d'information n°1938, octobre 2019. Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (Ministère de l'Éducation Nationale).

Document 3 – Niveau d'emploi et diplôme en France

Situations d'activité en 2016 selon le sexe et le diplôme

en %

	Ensemble	Sexe		Niveau de diplôme		
		Femmes	Hommes	Diplôme du supérieur	CAP, BEP, baccalauréat	Aucun diplôme, brevet des collèges
Sortis depuis 1 à 4 ans de formation initiale						
Taux d'activité	83,6	81,6	85,7	92,3	80,3	57,9
Taux d'emploi	67,0	66,8	67,3	82,1	59,8	27,6
Part de chômage	16,6	14,8	18,4	10,1	20,5	30,3
Part du halo autour du chômage	6,4	6,2	6,6	3,1	7,8	15,9
Taux de chômage ¹	19,8	18,1	21,5	11,0	25,5	52,4
Sortis depuis 11 ans ou plus de formation initiale						
Taux d'activité	84,7	80,1	89,3	92,7	86,1	70,2
Taux d'emploi	77,8	73,6	81,9	88,7	79,2	59,3
Part de chômage	6,9	6,5	7,3	4,0	6,9	10,9
Part du halo autour du chômage	3,7	4,1	3,3	1,9	3,6	6,5
Taux de chômage ¹	8,0	7,9	8,1	4,3	8,0	14,7

1. Champ restreint aux actifs et non limité aux personnes de 60 ans ou moins.

Champ : France hors Mayotte, population des ménages, personnes de 60 ans ou moins sorties depuis 1 an ou plus de formation initiale.

Source : Insee, enquête Emploi 2016.

Source : INSEE, Formations et emploi, 2018

Document 4a – Différences de salaires à niveau égal de diplôme

Les titulaires de diplômes de la production ont souvent un devenir plus favorable que ceux des services

Diplôme et spécialité de formation	Part des femmes parmi les actifs (%)	Taux de chômage BIT (%)	Part d'emplois à temps partiel (%)	Part des cadres et professions intermédiaires (%)	Salaires médians (euros 2009)	
Non diplômés, certificat d'études primaires, brevet des collèges	37	31	19	11	1 130	
Certificat d'aptitude prof. (CAP) Brevet d'études prof. (BEP) et équivalent	Agriculture, pêche, forêt, espaces verts	20	13	11	6	1 220
	Agro-alimentaire, cuisine	17	14	9	5	1 240
	Génie civil, construction, bois	2	15	2	6	1 280
	Textile, habillement, cuir	58	27	19	3	1 080
	Mécanique	2	14	4	9	1 290
	Électricité, électronique	3	15	6	14	1 300
	Commerce, vente	70	24	30	8	1 060
	Finances, comptabilité, gestion	55	23	22	9	1 140
	Secrétariat, communication	85	25	28	14	1 100
	Accueil, hôtellerie, tourisme	64	23	25	12	1 100
	Coiffure, esthétique	92	20	24	3	1 040
	Dip. paramédical et social de niveau CAP-BEP (aides-soignantes...)	93	6	15	2	1 350
Bac professionnel et équivalent	Agriculture, pêche, forêt, espaces verts	22	6	9	10	1 190
	Agro-alimentaire, cuisine	20	8	4	15	1 320
	Génie civil, construction, bois	6	5	2	16	1 370
	Mécanique	2	7	2	24	1 400
	Électricité, électronique	2	9	2	32	1 410
	Commerce, vente	61	15	2	23	1 140
	Finances, comptabilité, gestion	66	14	20	16	1 200
	Secrétariat, communication	87	20	23	18	1 170
	Accueil, hôtellerie, tourisme	55	12	21	26	1 170
	Coiffure, esthétique	92	8	15	5	1 100
	Ensemble diplômés de l'enseignement secondaire	44	14	15	19	1 250

Lecture : en tramé gris, les débuts de carrière difficiles.

Champ : actifs ayant terminé leur formation initiale (définitions) depuis dix ans ou moins, France métropolitaine.

Source : Insee, cumul des enquêtes Emploi de 2003 à 2009.

Source : Insee Première, n° 1313, 2010.

Document 4b – Différences de salaires à niveau égal de diplôme

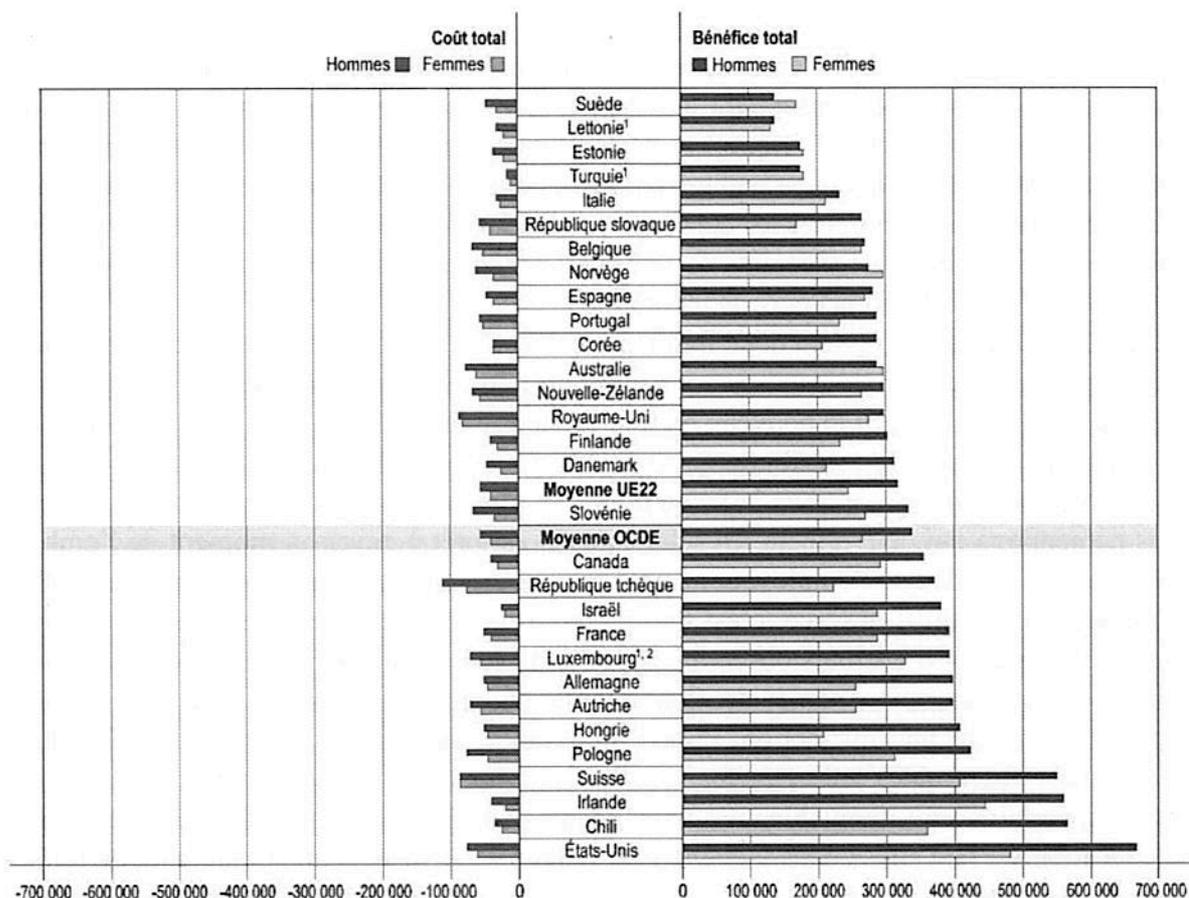
Les titulaires de diplômes de la production ont souvent un devenir plus favorable que ceux des services (suite)

Diplôme et spécialité de formation		Part des femmes parmi les actifs (%)	Taux de chômage BIT (%)	Part d'emplois à temps partiel (%)	Part des cadres et professions intermédiaires (%)	Salaire médian (euros 2009)
BTS, DUT et équivalent	Procédés, qualité, informatique indust.	6	8	2	75	1 640
	Agriculture, pêche, forêt, espaces verts	30	5	5	31	1 350
	Génie civil, construction, bois	19	3	4	81	1 590
	Mécanique	5	5	2	71	1 630
	Électricité, électronique	3	7	3	73	1 570
	Commerce, vente	55	9	8	50	1 460
	Finances, comptabilité, gestion	74	8	8	29	1 350
	Secrétariat, communication	83	11	13	44	1 340
	Informatique, réseaux	16	8	4	80	1 590
	Accueil, hôtellerie, tourisme	75	10	11	47	1 390
Deug	Sciences, droit, économie	45	12	13	51	1 540
	Lettres, sciences humaines	67	15	17	43	1 300
Diplôme santé-social, niveau bac+2	Santé (notamment infirmières)	84	2	16	98	1 680
	Travail social	87	6	16	94	1 510
Licence, licence professionnelle	Sciences exactes et naturelles	58	5	11	84	1 640
	Droit, économie, sciences humaines	71	8	18	66	1 440
	Lettres, langues et arts	81	9	18	69	1 440
	Spécialités de la production	23	9	4	83	1 610
	Spécialités de services	49	10	9	71	1 500
Masters 1 et 2, maîtrise, DEA, DESS	Physique, mathématique	34	6	6	96	2 000
	Chimie, biochimie, sc. de la vie et de la terre	57	8	11	89	1 760
	Économie	59	7	8	73	1 790
	Droit, sciences politiques	70	9	10	82	1 940
	Histoire, géographie	57	8	15	80	1 590
	Sociologie, psychologie	82	13	35	80	1 480
	Français, littérature, philosophie	80	9	16	81	1 600
	Arts	60	13	30	76	1 360
	Langues, linguistique	85	9	17	77	1 650
	Spécialités de la production	28	7	7	93	2 060
	Commerce, vente	58	9	3	80	2 000
	Finances, assurances, comptabilité, gestion	52	5	6	73	2 070
	Communication, documentation	60	15	14	80	1 710
	Informatique, réseaux	18	9	3	94	2 300
	Services aux personnes	57	11	16	79	1 690
Services à la collectivité	53	8	11	86	1 850	
Diplôme d'école d'ingénieurs	Généraliste	19	6	3	98	2 510
	Mécanique, électricité, électronique	15	4	5	97	2 470
	Informatique, réseaux	13	5	1	97	2 510
Diplôme d'école de commerce et de gestion		47	7	3	91	2 570
Doctorat	Sciences exactes et naturelles	34	6	5	96	2 330
	Droit, économie, lettres, sciences humaines	47	8	16	93	2 100
	Santé	60	2	25	99	2 570
Ensemble diplômés de l'enseignement supérieur		54	8	11	74	1 650
Ensemble toutes formations confondues		48	14	13	45	1 380

Lecture : on tramé les débuts de carrière favorables. Le tableau détaillé figure sur insee.fr.
 Champ : actifs ayant terminé leur formation initiale (définitions) depuis dix ans ou moins, France métropolitaine.
 Source : Insee, cumul des enquêtes Emploi de 2003 à 2009.

Source : Insee Première, n° 1313, 2010.

Document 5 – Coûts et bénéfices privés de l’obtention d’un diplôme de l’enseignement supérieur chez les individus de sexe masculin ou féminin (2018)



Remarque: Les coûts et bénéfices à venir sont actualisés à un taux de 2 %.

1. Les calculs se basent sur les rémunérations nettes, car les rémunérations brutes ne sont pas disponibles.

2. L'année de référence n'est pas 2018. Consulter le tableau source pour de plus amples informations.

Les pays sont classés par ordre croissant du bénéfice privé total chez les individus de sexe masculin.

Source : OCDE (2021), tableaux A5.1 et A5.2. Consulter la section « Source » pour tout complément d'information et l'annexe 3 pour les remarques (https://www.oecd.org/education/education-at-a-glance/EAG2021_Annex3_ChapterA.pdf).

StatLink  <https://stat.link/us3oia>

Note de lecture : Dans les pays de l'OCDE, l'enseignement supérieur procure en moyenne par diplômé au fil de leur carrière un bénéfice total de 340 100 USD de plus chez les hommes qu'un diplôme du deuxième cycle du secondaire et de 266 800 USD chez les femmes (si on prend pour hypothèse un départ à la retraite de 64 ans). Dans cette analyse, les coûts correspondent aux coûts directs de l'investissement dans la poursuite des études et au manque à gagner durant les études tandis que les bénéfices correspondent à la rémunération, déduction faite de l'impôt sur le revenu et des cotisations sociales. Les montants sont exprimés en équivalents USD convertis sur la base des parités de pouvoir d'achat pour le PIB.

Source : OCDE, *Regards sur l'éducation*, 2021.

Document 6 - Théorie du signal : L'embauche comme investissement en contexte d'incertitude

Dans la plupart des marchés du travail, l'employeur n'est pas sûr des capacités productives d'un individu au moment où il l'embauche. Il ne disposera pas nécessairement non plus de cette information immédiatement après l'embauche. L'apprentissage de l'emploi peut prendre du temps. Une formation spécifique est souvent nécessaire. Et il peut y avoir une période contractuelle durant laquelle la renégociation du contrat initial n'est pas autorisée. Le fait qu'il faille du temps pour apprécier les capacités productives d'un individu signifie que l'embauche est une décision d'investissement. Le fait que les capacités du nouveau recruté ne soient pas connues à l'avance rend la décision incertaine.

Embaucher quelqu'un revient donc fréquemment à acheter un billet de loterie. Dans ce qui suit, je supposerai que l'employeur verse à l'individu l'équivalent monétaire certain du gain de la loterie comme salaire. Si le nouveau recruté est neutre face au risque, le salaire de cet individu est considéré comme la contribution marginale de l'individu à l'organisation qui l'embauche.

Le plus important devient alors la façon dont l'employeur perçoit ce jeu de loterie, car ce sont ses perceptions qui déterminent les salaires qu'il est prêt à payer au moment de l'embauche. Nous avons stipulé que l'employeur ne peut pas observer directement le produit marginal avant l'embauche. Ce qu'il observe, c'est une pléthore de données personnelles sous la forme de caractéristiques et d'attributs observables de l'individu, et ce sont ces données qui doivent en fin de compte déterminer son évaluation du billet de loterie qu'il achète. (...) À ce stade, il est utile d'introduire une distinction, dont l'importance sera bientôt claire. Parmi les attributs personnels observables qui constituent collectivement l'image que présente le candidat à un emploi, certains sont immuablement fixes, tandis que d'autres sont modifiables. Par exemple, l'éducation est une chose dans laquelle l'individu peut investir à un certain coût en termes de temps et d'argent. En revanche, l'origine ethnique et le sexe ne sont généralement pas considérés comme modifiables. Je qualifierai d'indices les attributs observables et inaltérables, réservant le terme de signaux aux caractéristiques observables attachées à l'individu et susceptibles d'être manipulées par lui. Certains attributs, comme l'âge, changent, mais pas à la discrétion de l'individu. Dans mon vocabulaire, il s'agit d'indices. (...) Pour chaque ensemble de signaux et d'indices qu'observe l'employeur, il en déduira un produit marginal attendu pour chaque individu qui dispose de ces attributs observables. On considère que ceci est le salaire offert aux candidats avec ces caractéristiques. Les salaires offerts aux salariés potentiels sont donc une fonction dont les arguments sont les signaux et les indices.

Le demandeur ne peut pas faire grand-chose à propos des indices. Les signaux, en revanche, sont modifiables et donc potentiellement manipulables par le candidat. Bien sûr, il peut y avoir des coûts pour effectuer ces ajustements. L'éducation, par exemple, est coûteuse. Nous appelons ces coûts les coûts de signalisation. Notez que l'individu, en acquérant une éducation, n'a pas besoin de penser qu'il signale quelque chose. Il investira dans l'éducation si le rendement est suffisant, tel que défini par le barème des salaires proposés. On suppose donc que les individus choisissent les signaux (pour la plupart, je parlerai en termes d'éducation) de manière à maximiser la différence entre les salaires offerts et les coûts de signalisation.

Source : Michael Spence, "Job Market Signaling », *Quarterly Journal of Economics*, n°87, p. 355-374, 1973.

Document 7 - Carte scolaire et stratégies familiales

« Un investissement scolaire stratégique »

Comme d'autres parents (mais pas tous), ces déclarants de fausses adresses entretiennent un rapport investi et stratégique à l'institution scolaire, dans laquelle ils placent de fortes attentes quant à la réussite sociale de leurs enfants. Ils tiennent des propos relativement similaires dans différentes situations. Par exemple, Frédéric (cadre dans un prestigieux cabinet d'avocats) déclare : « Évidemment, on veut le meilleur pour nos gosses, donc plus ils auront de super résultats dans de bonnes écoles, mieux ce sera. » De son côté, Murielle (professeure agrégée en lycée) annonce : « Les filles choisiront un peu les études qu'elles préfèrent, tant que ce ne sont pas des filières de relégation, comme il y en a malheureusement trop. Il faut juste que ce soit de bonnes formations, dans de bons établissements. » Gregory (chef de sa petite entreprise de design) ajoute : « Pour notre fils, avec ma femme, on veut juste ce qu'il y a de mieux, les écoles, le collège, les profs... même après le bac, on y pense déjà parfois. Faut pas se rater aujourd'hui. » Bien connues et désormais largement diffusées bien qu'inégalement dans différents milieux sociaux, de telles dispositions ne sont pas propres à ces parents, mais elles sont récurrentes chez ceux rencontrés ayant déclaré une fausse domiciliation.

(...) Surtout, en dépit des contraintes de la carte scolaire qu'ils expérimentent, ces parents se disent attachés à l'école publique et rejettent l'enseignement privé qui n'est pourtant pas soumis à la sectorisation. Cet attachement résulte principalement de leurs trajectoires scolaires et de leurs socialisations familiales et politiques (induisant la plupart du temps un rapport distant à la religion), mais est aussi entretenu par certains de leurs investissements actuels dans l'institution (qu'il s'agisse des activités de leurs enfants ou d'investissements professionnels comme ceux de Murielle ou de Didier, tous deux enseignants du public). À l'exception de Gregory qui a fait un passage dans un collège privé, tous ont été scolarisés dans des établissements publics tout au long de leur parcours et s'en disent très satisfaits. Ils se disent « fondamentalement convaincus de la supériorité » (François) éthique et politique de l'école publique. Cela fait notamment écho à leur socialisation politique familiale. François raconte à quel point son père, fonctionnaire de La Poste, athée convaincu (« bouffeur de curés ») et syndiqué à gauche (CGT) toute sa carrière, « se retournerait dans la tombe s'il voyait ses petits enfants dans une école privée [...] ! Il répétait que l'école publique laïque était un progrès ». De même, Didier (maître de conférences en psychologie dans une université publique) explique le rôle central de son « modèle éducatif familial où l'école ne pouvait être que publique », et des « choix militants » de ses parents (hauts fonctionnaires aux ministères de la Culture et de l'Intérieur) pour l'éducation nationale. Ainsi, aucun de ces enquêtés n'envisage d'inscrire un de ses enfants dans un collège ou une école privés, alors qu'ils en ont les moyens financiers et qu'ils savent que cela pourrait être une solution alternative pour s'accommoder de la carte scolaire. Pour eux, une inscription dans le privé constituerait une faute morale du fait de leurs inclinaisons politiques et militantes. »

Source : Lorenzo Barrault-Stella, « De fausses adresses pour contourner la carte scolaire. Arrangements avec le droit et fidélité à l'État », Sociétés contemporaines, 2017/4 (N° 108), p. 125-154

Document 8 – La gestion des aspirations scolaires

Plus que la révélation d'une vocation professionnelle, la rencontre heureuse qui se produit entre les élèves et la formation [en Section de technicien supérieur (STS)] s'appuie sur un ajustement du langage scolaire et une modification de l'ordre des qualités attendues : l'écrit devient l'oral, l'attention devient la participation, l'intérieur devient l'extérieur et la distance des enseignants se fait proximité. Comme en témoigne encore Sarah, étudiante en STS assistant de direction, qui n'aimait pas l'école au collège et qui se trouve réorientée en BEP secrétariat, faute de places en BEP carrières sanitaires et sociales : « Bon BEP secrétariat, ce n'est pas très dur – enfin là, j'ai du recul –, mais c'est vrai que j'aimais bien parce qu'on n'avait pas beaucoup de matières générales, c'était vachement plus concret. Le secrétariat : j'aimais bien, enfin ça ne me dérangeait pas plus que ça. Les profs : ce n'était pas du tout la même ambiance qu'au collège, donc c'est vrai qu'on était vachement plus proches. » (Bac pro secrétariat ; Père : sans diplôme, vendeur dans un magasin de bricolage ; Mère : BEP, agent de maîtrise). Les étudiants des sections professionnelles du secondaire ont eu le sentiment de « parler la même langue » que leurs professeurs, ce qui n'était pas le cas au collège (Grignon, 1971, p. 227). L'expérience, nouvelle pour certains, des bons résultats scolaires participe également de cette rencontre heureuse avec la formation (Jellab, 2008). [...] Les enseignants des matières professionnelles semblent faire œuvre d'une complicité tacite à l'égard du désinvestissement de leurs étudiants dans les matières générales, à l'instar de ce qu'observait Claude Grignon au sujet des chahuts préférés en classes d'enseignement général par les élèves de CET : « les remontrances que les PTA [professeurs techniques adjoints] adressent à leurs élèves à ce sujet sont parfois faites sur un ton mi-sérieux mi-plaisant qui dissimule assez mal une certaine "complicité de classe" contre le "parasitisme" des représentants de la culture savante » (Grignon, 1971, p. 222).

La cosmogonie de la voie professionnelle s'articule alors autour de la dialectique : « nos matières » contre « leurs matières » (« On préfère l'atelier, tous, parce qu'on fait notre spécialité »). Dans le cadre des savoirs transmis au sein des STS, le référentiel n'est plus la forme scolaire mais la forme professionnelle. « Être professionnel » est une qualité, tandis que « Ne pas être assez professionnel » constitue un défaut. Les consignes des exercices ou des devoirs renvoient fréquemment au monde du travail et à l'entreprise, qui constituent la référence positive. Par exemple, dès le deuxième jour de la rentrée, dans la classe de 1^{re} année de STS assistant de manager du lycée Michel-Foucault, à l'occasion de la première séance de travaux dirigés, l'enseignante exige des étudiants qu'ils construisent, à partir du logiciel Excel, « un tableau de qualité professionnelle ». Un travail jugé négativement peut être sanctionné d'un commentaire tel que : « Vous n'avez pas fait ce qui fait professionnel. » Les comportements sont également jugés à l'aune de cette nouvelle référence : « Quand tu seras en entreprise... » ou « Face à un patron, tu n'agirais pas comme ça, n'est-ce pas ? »

Ces nouveaux critères de jugement conviennent à ces étudiants qui se trouvent dès lors soulagés de ne plus être évalués sur leurs points faibles, à savoir les enseignements généraux. Dans ces nouvelles règles du jeu scolaire, ils ont le sentiment de pouvoir réussir.

Source : *Sophie Orange, « Chapitre 7 - Le désordre des savoirs », L'autre enseignement supérieur. Les BTS et la gestion des aspirations scolaires, sous la direction de Orange Sophie. Presses Universitaires de France, 2013, pp. 97-108.*

SESSION 2022

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

* * *

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

* * *

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandée.

* * *

PROBLÈME A.

On s'intéresse à deux jeux d'apparence similaire.

Premier jeu. On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11 et si elle tombe sur face, on perd 10. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants.

Pour $i \geq 1$, on note X_i la variable aléatoire égale à 11 si la i -ème pièce tombe sur pile et égale à -10 si elle tombe sur face.

(1) Calculer l'espérance $E[X_i]$ de X_i , pour $i \geq 1$.

On note $S_0 = 100$ le montant initial et S_n le montant obtenu après n lancers.

(2) (2a) Pour $n \geq 1$, exprimer S_n en fonction des X_i , $i \geq 1$.

(2b) Calculer la probabilité $P(S_2 = k)$ pour tout entier k .

(2c) Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $E[S_n]$.

(3) (3a) Montrer que $P(S_{10} \geq 160) \leq \frac{2}{3}$.

(3b) Montrer que $P(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On suppose maintenant qu'on arrête le jeu dès lors que le montant S_n devient inférieur ou égal à 89 ou supérieur ou égal à 105. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de pièces lancées avant l'arrêt du jeu.

(4) (4a) Calculer $P(T = 1)$.

(4b) Calculer $P(T = 2)$.

(4c) Si $T \geq 3$, que vaut S_2 ?

(4d) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant supérieur à 100 sachant que l'on a tiré 3 pièces ou moins?

(4e) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant égal à 105?

Second jeu. On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11% de notre montant et si elle tombe sur face, on perd 10% de notre montant. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants. *La différence avec le jeu précédent est que le gain ou la perte sont maintenant des pourcentages du montant.*

Pour $i \geq 1$, on note Y_i la variable aléatoire égale à 1,11 si la i -ème pièce tombe sur pile et égale à 0,9 si elle tombe sur face.

(5) Calculer l'espérance $E[Y_i]$, pour $i \geq 1$.

On note $\Pi_0 = 100$ le montant initial et Π_n le montant obtenu après n lancers.

(6) (6a) Pour $n \geq 1$, exprimer Π_n en fonction des $Y_i, i \geq 1$.

(6b) Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $E[\Pi_n]$.

On note $\alpha = -E[\ln(Y_1)]$.

(7) (7a) Montrer que $\alpha > 0$.

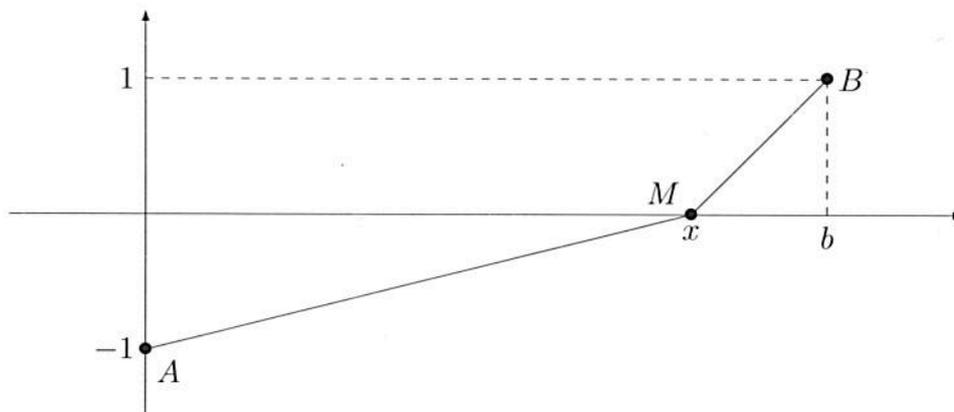
(7b) Montrer que $P(\Pi_n \leq 100 e^{-\frac{\alpha}{2}n}) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

(8) (8a) En quoi ce second jeu peut-il paraître paradoxal?

(8b) Si vous aviez le choix, préféreriez-vous jouer au premier jeu ou au second? Justifier brièvement votre réponse.

PROBLÈME B.

Dans le plan muni du repère cartésien habituel, on considère le point A de coordonnées $(0, -1)$ et le point B de coordonnées $(b, 1)$, où $b > 0$ est un réel fixé. On considère également un point sur l'axe des abscisses $M = (x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Ces trois points sont représentés sur la figure ci-dessous.



(9) (9a) Quelles sont les longueurs des segments $[AM]$ et $[MB]$?

(9b) Que représente la quantité $L(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x-b)^2}$?

(10) On cherche les coordonnées du point d'intersection I entre le segment $[AB]$ et l'axe des abscisses.

(10a) Trouver les réels α et β tels que le graphe de la droite d'équation $d(x) = \alpha x + \beta$ passe par les points A et B .

(10b) En déduire que $I = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$.

(11) Où placer le point M sur l'axe des abscisses pour que la longueur $AM + MB$ de la ligne brisée partant de A , passant par M et terminant en B soit la plus courte possible ?

Dans la suite du problème, V est un réel strictement positif et on s'intéresse à la fonction $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie pour $x \in \mathbf{R}$ par

$$T(x) = \frac{1}{V} \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x-b)^2}.$$

(12)(12a) Justifier que T est dérivable sur \mathbf{R} .

(12b) Calculer sa dérivée T' .

On admet que la dérivée seconde est donnée par

$$T''(x) = \frac{1}{V(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+(x-b)^2)^{3/2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(12c) Montrer que T' est strictement croissante sur \mathbf{R} .

(12d) Montrer qu'il existe un unique point $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $T'(x_0) = 0$.

(12e) Montrer que $x_0 \in [0, b]$.

Pour tout $V > 0$, on note $x_0(V)$ l'unique réel dans $[0, b]$ tel que

$$\frac{x_0(V)}{\sqrt{1+x_0(V)^2}} = V \frac{b-x_0(V)}{\sqrt{1+(x_0(V)-b)^2}}.$$

(13)(13a) Justifier que $1 \leq \sqrt{1+x_0(V)^2} \leq \sqrt{1+b^2}$.

(13b) En déduire que $x_0(V) \leq Vb\sqrt{1+b^2}$.

(13c) Montrer que $x_0(V)$ admet une limite lorsque V tend vers 0 et la déterminer.

(13d) Que pensez-vous de $\lim_{V \rightarrow +\infty} x_0(V)$? Justifier.

On prolonge la fonction qui à $V \in \mathbf{R}_+^*$ associe $x_0(V)$ par continuité en 0 et on note encore x_0 la fonction obtenue, définie ainsi de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R} .

(14)(14a) Montrer que la fonction x_0 est dérivable en 0 et déterminer la valeur de $x_0'(0)$.

(14b) Donner un développement limité à l'ordre 1 de x_0 au voisinage de 0.

PROBLÈME C.

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1 et $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. On notera M^T la matrice transposée d'une matrice M ; la notation usuelle tM est également tolérée mais il convient d'indiquer clairement sur quelle matrice porte la transposition, par exemple en séparant clairement les termes ($M^T M$ ou $M {}^tM$) ou à l'aide de parenthèses ($(M^T)M$ ou $M({}^tM)$).

On considère les deux propriétés suivantes pour des matrices.

Propriété O. On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$ vérifie la propriété O si ses colonnes, notées C_1, \dots, C_n , sont deux à deux orthogonales, c'est-à-dire

$$C_i^T C_j = \sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j} = 0 \quad \text{pour tout } i \neq j.$$

Propriété I. On dit qu'une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ vérifie la propriété I si $M^T M = I_n$, où I_n est la matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$ qui a des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

(15) On considère la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(15a) La matrice G vérifie-t-elle la propriété O? La propriété I?

(15b) Déterminer le noyau de G .

(15c) Soit λ un réel non nul. Montrer que λ est une valeur propre de G si et seulement si λ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(15d) Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

(15e) La matrice G est-elle diagonalisable?

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note C_1, \dots, C_n ses colonnes.

(16) Montrer que le coefficient d'indices i et j de $M^T M$ est $(M^T M)_{ij} = C_i^T C_j$.

(17) **Dans cette question**, on suppose que la matrice M vérifie la propriété O.

(17a) Montrer que la matrice $M^T M$ est diagonale.

(17b) Montrer que les coefficients diagonaux de $M^T M$ sont positifs ou nuls.

(17c) Si $(M^T M)_{jj}$ est nul, que peut-on en déduire sur C_j ?

(17d) Montrer que M est inversible si et seulement si aucune de ses colonnes n'est entièrement remplie de 0.

(18) **Dans cette question**, on suppose que la matrice M vérifie la propriété I.

(18a) Montrer que M est inversible.

(18b) Soit $P \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice vérifiant aussi la propriété I. Montrer que $P^T M P$ vérifie la propriété I.

On suppose désormais que $n = 3$. On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire de u avec v et on rappelle que la norme est donnée par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

On fixe un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbf{R}^3 tel que $x_3 \neq 0$, ainsi qu'un vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ de même norme que x et non colinéaire à x . On définit

$$z = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

(19) On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$.

(19a) Montrer que $\|z\| = 0$ si et seulement si $A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(19b) Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(19c) En déduire que la dimension du noyau de l'application linéaire représentée par A est inférieure ou égale à 1.

(19d) Montrer que $z \neq (0, 0, 0)$.

(20)(20a) Montrer que $\langle x, z \rangle = 0$ et $\langle y, z \rangle = 0$, puis que $\langle x + y, z \rangle = 0$ et $\langle x - y, z \rangle = 0$.

(20b) Montrer que la famille $(x + y, x - y, z)$ est une base de \mathbf{R}^3 .

(21) On définit l'application linéaire $\ell : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ par $\ell(x + y) = x + y$, $\ell(x - y) = y - x$ et $\ell(z) = z$.

(21a) Quelle est la matrice de ℓ dans la base $\left(\frac{x + y}{\|x + y\|}, \frac{x - y}{\|x - y\|}, \frac{z}{\|z\|} \right)$? On notera L cette matrice.

On note $P = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_1}{\|x + y\|} & \frac{x_1 - y_1}{\|x - y\|} & \frac{z_1}{\|z\|} \\ \frac{x_2 + y_2}{\|x + y\|} & \frac{x_2 - y_2}{\|x - y\|} & \frac{z_2}{\|z\|} \\ \frac{x_3 + y_3}{\|x + y\|} & \frac{x_3 - y_3}{\|x - y\|} & \frac{z_3}{\|z\|} \end{pmatrix}$.

(21b) Exprimer la matrice de ℓ dans la base canonique comme un produit de matrices.

(22) Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_3(\mathbf{R})$ qui vérifie la propriété I, et telle que

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ et } M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$