ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

15 parvis René-Descartes
BP 7000, 69342 Lyon cedex 07
Tél. +33 (0)4 37 37 60 00
www.ens-lyon.fr

Concours d'entrée 2023

Annexe sujets

Mathématiques
Série Sciences Économiques et Sociales

UNIVERSITÉ DE LYON

ENS DE LYON

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On considère la fonction F qui à un réel x associe $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer le signe et le sens de variation de la fonction F.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,dt$.
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du.$$
   En déduire la limite de F en 0^+.
5. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}.$$
   En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt$ converge.
   (b) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ lorsque x tend vers 0.
   (c) Déterminer un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 2.

Soit $n \geq 2$ un entier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices carrées à coefficients réels de taille n. On considère U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et le sous-espace vectoriel E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :
$$E = \left\{\alpha I_n + \beta U,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

1. (a) Montrer que (I_n, U) est une base de E.
   (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer U^p.
   (c) Montrer que, pour tout $A \in E$ et $A' \in E$, on a $AA' \in E$.
   (d) Soit $A = \alpha I_n + \beta U \in E$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer les coordonnées de A^p dans la base (I_n, U) en fonction de α, β et p.
2. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A appartient à E. On considère l'application $\varphi \colon E \to E$ définie par, pour tout $M \in E$, $\varphi(M) = AM$.
   (a) Montrer que φ est un automorphisme de E.
   (b) En déduire que $A^{-1} \in E$.
3. Soit $A = \alpha I_n + \beta U$ un élément de E.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que A soit inversible.

4. Soit $A = \alpha I_n + \beta U$ un élément de E, on suppose β non nul.
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple de réels (a, b) tel que $A^2 + aA + bI_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ où $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) > 0 \text{ et } f(x+1) = xf(x)$$

1. On suppose dans cette question qu'il existe un réel c strictement positif tel que $f(c) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $u \in]c, c+1[$ et $v \in]c+1, c+2[$ tels que $f'(u) = f'(v) = 0$.
   (b) En déduire une contradiction, puis montrer que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Montrer que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle ne s'annule qu'une seule fois en un point $\alpha \in]1, 2[$.
   (b) Déterminer le signe de $f(2)$ et en déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Déterminer une expression de $f(n)$ en fonction de $f(2)$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   (c) Déterminer un équivalent de f en 0^+. En déduire la limite de f en 0^+.
4. Tracer le tableau de variation de f.
5. On suppose dorénavant que f est définie sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie les deux conditions :

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[,\ f(x+1) = xf(x)\ ;$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) > 0.$$

   (a) Déterminer le signe de f sur $]-1, 0[$.
   (b) Déterminer les limites de f en 0^- et en -1^+.

Exercice 2.
On considère deux urnes A et B et deux jetons numérotés 1 et 2. On tire le numéro 1 ou 2 au hasard de manière équiprobable et indépendante et on change d'urne le jeton correspondant.
Au départ les deux jetons sont dans l'urne A.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n le nombre de jetons dans l'urne A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quelles sont les valeurs prises par X_n ?
2. (a) Soit $k \in \{1, 2\}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_{n+1} = k | X_n = k)$, $P(X_{n+1} = k+1 | X_n = k)$ et $P(X_{n+1} = k-1 | X_n = k)$.
   (b) On considère la matrice $Q = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où, pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$,

$$q_{ij} = P(X_{n+1} = j - 1 | X_n = i - 1).$$

   Écrire la matrice Q.
   (c) La matrice Q est-elle diagonalisable ?
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer Q^n.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n+1} = \mu_n Q$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \mu_0 Q^n$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X_n.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre moyen de jetons dans l'urne A au bout de n étapes ?
4. Notons T la variable aléatoire qui compte le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial pour la première fois (c'est-à-dire avec deux jetons dans A) si on y revient et qui est égale à 0 sinon.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(T = 2k + 1) = 0$.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $P(T = 2k) = \dfrac{1}{2^k}$.
   (c) Montrer que $P(T = 0) = 0$.
   (d) Calculer l'espérance de T et interpréter le résultat obtenu.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x-e^{-x}}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite on note X une variable aléatoire qui admet f comme densité.

2. Calculer la fonction de répartition F_X de X.
3. On pose $Y = e^{-X}$. Déterminer la loi de Y.
4. (a) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (-\ln u)^m e^{-u}\, du$ est absolument convergente.
   (b) En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre m et que
   $$E(X^m) = \int_0^{+\infty} (-\ln u)^m e^{-u}\, du.$$
   Indication : on pourra poser $u = e^{-x}$.
5. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
   $$M_n = \max\{Z_1, \ldots, Z_n\} \qquad \text{et} \qquad X_n = M_n - \ln n.$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La variable aléatoire M_n est-elle à densité ? Le cas échéant, calculer une densité de M_n.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer G_n la fonction de répartition de X_n.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = F_X(x)$$

Exercice 2.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et k un réel strictement positif.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$$

On appelle fonction lipschitzienne, toute fonction telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel la fonction est k-lispchitzienne.

1. Montrer que les fonctions constantes sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que la fonction cosinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.
3. Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur I est continue sur I.
4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$.
   Montrer que f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

5. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel ℓ de $[a, b]$ tel que $f(\ell) = \ell$.
   (b) On suppose dans la suite de l'exercice que f est k-lipschitzienne, où k désigne un réel de $]0, 1[$.
      i. Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \in [a, b]$ tel que $f(\ell) = \ell$.
      ii. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [a, b] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega)$ soit inclus dans $\mathbb{N}$.
On définit la *fonction génératrice* de X par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = E\left(t^X\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition et l'expression de la fonction génératrice dans les cas suivants :
   (a) X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ où n désigne un entier naturel non nul.
   (b) X suit la loi binomiale de paramètres n et p, avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.
   (c) X suit la loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.
   (d) X suit la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0, 1[$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $X(\Omega)$ est fini

2. (a) Montrer que la fonction génératrice caractérise la loi, c'est-à-dire : si T et Z sont deux variables aléatoires discrètes finies prenant des valeurs entières positives, alors T et Z suivent la même loi si et seulement si $G_T = G_Z$.
   (b) Montrer que $E(X) = G'_X(1)$.
   (c) Déterminer une expression de la variance de X en fonction de G'_X et G''_X.
3. On dit que X est *décomposable* si et seulement s'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z, non constantes en dehors d'un événement de probabilité nulle, telles que $Y + Z$ ait la même loi que X.
   (a) On suppose que X est décomposable.
   Donner une relation entre G_X, G_Y et G_Z.
   (b) Soient un entier $n \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$.
   Montrer que si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors X est décomposable.
   (c) Soit un entier $n \geq 2$.
   On suppose qu'il existe deux entiers r et s supérieurs ou égaux à 2, tels que $n = rs$ On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
   Montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \quad \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} t^i\Bigg) \left(\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{s-1} t^{rj}\right).$$
   En déduire que X est décomposable.

Exercice 2.
Soit $m \geq 1$ un entier, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^m$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^m, \quad \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

On note enfin g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ tel que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^m)^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$.
Dans cet exercice, on admet l'existence d'un tel endomorphisme g.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} g)^\perp$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\|g(x)\| \leq \|x\|$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\|f^n(x)\| \leq \|x\|$.
4. (a) Justifier que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = \operatorname{Im}(g - \mathrm{id})^\perp$ et $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(g - \mathrm{id})^\perp$.
   (b) Montrer que, pour tout $y \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$, $\|g(y) - y\|^2 = \|g(y)\|^2 - \|y\|^2$.
   (c) En déduire que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(g - \mathrm{id})$.
   (d) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id})$ sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^m$.

On note $p \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$,

$$u_n(x) = \frac{1}{n}\left(x + f(x) + f^2(x) + \cdots + f^{n-1}(x)\right).$$

On admet que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire.

5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n(x) - p(x)\| = 0.$$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. Dans cette question r désigne un entier naturel et p un réel de $]0,1[$.
   (a) Montrer que : $\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.
   (b) Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}p^n$.
   En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant r} \binom{n}{r} p^n$ est convergente.

   Dans la suite, on pose alors pour tout entier naturel r, $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} p^n$.

   (c) Donner la valeur de S_0.
   (d) En utilisant la formule du triangle de Pascal, montrer que : $(1-p)S_{r+1} = pS_r$.
   (e) En déduire que :
   $$\forall p \in]0,1[,\ \forall r \in \mathbb{N},\ \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} p^n = \frac{p^r}{(1-p)^{r+1}}$$
   puis donner la valeur de $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} p^{n-r}$.
2. Le jeu de la piñata consiste à frapper avec une batte une figurine en carton pleine de bonbons jusqu'à ce qu'elle s'ouvre et libère son contenu.
   Les joueurs ayant les yeux bandés et jouant à tour de rôle, un coup de batte est indépendant du précédent et a une probabilité $p \in]0,1[$ d'atteindre la piñata. La piñata s'ouvre lorsqu'elle a été touchée par $r+1$ coups de batte, où r désigne un entier naturel.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de coups de batte nécessaires à l'ouverture de la piñata (qu'ils aient touchés la piñata ou pas).
   Déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

Exercice 2.
Soit $n \geq 1$ un entier et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1. On dit qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est une isométrie si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| = \|x\|$. On note $O(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a :
   $$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$
   (b) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, montrer que f est une isométrie si et seulement si, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
   (c) Montrer que si f est une isométrie alors f est un automorphisme.

(d) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B} = (e_1, , \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que f est une isométrie si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(e) Soit e_1 et e_2 deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\|e_1\| = \|e_2\|$ si et seulement si $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$ sont orthogonaux.

On considère $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme bijectif qui transforme deux vecteurs orthogonaux en deux vecteurs orthogonaux.

2. On considère la fonction $\varphi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}$.
   (a) Montrer que φ est constante.
   (b) En déduire qu'il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|u(x)\| = k\|x\|$.
   (c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha u \in O(\mathbb{R}^n)$.
3. Soit $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que αv est une isométrie. Montrer que v est un automorphisme et que v transforme deux vecteurs orthogonaux en deux vecteurs orthogonaux.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Pour tout réel x, on définit la partie entière de x comme le plus grand entier inférieur ou égal à x, c'est-à-dire l'unique entier noté $\lfloor x \rfloor$ et vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Soient $p \in]0, 1]$, $q = 1 - p$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Dans toute cette question, $X_1, X_2, \ldots, X_N$ désignent des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X_1.
   (b) On pose $Y = \max(X_1, \ldots, X_N)$.
   Déterminer la loi de Y.
   (c) On pose $Z = \min(X_1, \ldots, X_N)$.
   Déterminer la loi de Z.
2. Dans la suite de l'exercice $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
   Pour tout entier naturel non nul r, on admet qu'on définit une variable aléatoire T_r en posant :

$$T_r = \begin{cases} \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid V_1 + \cdots + V_n = r\}) & \text{si ce minimum existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) On suppose dans cette question que $r = 1$.
   Que désigne la variable aléatoire T_1 ? Quelle est sa loi ?
   (b) Pour tout entier naturel non nul k, calculer $P(T_r = k)$.
   (c) Montrer que $P([T_r = 0]) = \lim\limits_{n\to+\infty} P([T_r > n])$.
   (d) En déduire que l'événement $[T_r = 0]$ est négligeable.

Exercice 2.

1. (a) Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^{x+1}}$ converge.
   (b) On considère la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^{x+1}}$.
   Montrer que f est décroissante sur D.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \in D$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1 + t^x)}$ converge.
   On pose, pour tout $x \in D$, $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1 + t^x)}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in D$, $g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.
   Indication : on remarquera que $\dfrac{1}{t(1 + t^x)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1 + t^x}$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in D$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}$.

(d) Montrer que, pour tout $x \in D$, $0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$.

3. (a) Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   (b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ puis sa limite quand x tend vers 0.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 2$.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, on note $\mathscr{D}$ la droite passant par les points $(a, \varphi(a))$ et $(b, \varphi(b))$.
   (a) Montrer que $\mathscr{D}$ intersecte l'axe des abscisses en un unique point $(\alpha, 0)$ où $\alpha = a - \dfrac{\varphi(a)}{a+b}$.
   (b) On suppose $a \geq 1$ et $b \geq 1$.
      i. Montrer que si $a \leq \sqrt{2}$ alors $\alpha \geq a$.
      ii. Montrer que $\alpha \geq 1$.
2. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_n + x_{n+1}}\varphi(x_n).$$
   (a) Expliquer comment construire graphiquement x_2 et x_3.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+2} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| \times |x_{n+1} - \sqrt{2}|$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \sqrt{2}| \leq 2 \times \left.\dfrac{1}{2}\right)^{r_n}$ où $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite non constante vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 que vous expliciterez.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer r_n en fonction de n.
   (e) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.
Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une entreprise de paquets de céréales dépose une petite figurine dans chaque paquet.
Il y a N figurines différentes, numérotées de 1 à N, que l'entreprise répartit de façon uniforme avec une fréquence de $\dfrac{1}{N}$ pour chaque figurine.
Un collectionneur de figurines achètent des paquets les uns après les autres et de façon indépendante pour compléter sa collection.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro de la figurine trouvée dans le n-ème paquet de céréales acheté.
Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on note T_k le nombre de paquets de céréales achetés pour obtenir, pour la première fois, k figurines différentes.

1. Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de $T_2 - T_1$ et, de façon plus générale, celle de $T_{k+1} - T_k$ pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$.
3. Donner l'espérance de $T_{k+1} - T_k$ pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$ puis en déduire une expression de $E(T_N)$ (on donnera le résultat en fonction de $H_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$).
4. Pourquoi peut-on affirmer que les variables $T_{k+1} - T_k$ pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$ sont indépendantes ?

5. Justifier que T_N admet une variance et montrer qu'il existe un réel $c > 0$, ne dépendant pas de N, tel que
$$V(T_N) \leqslant cN^2.$$

6. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{N \to +\infty} P\left(\left| \frac{T_N - E(T_N)}{H_N} \right| \geqslant \varepsilon N \right) = 0$$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Si n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et si $x_1, \dots, x_n$ est une liste de réels, pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, on note $s_k(x_1, \dots, x_n)$ le k-ème élément de la liste lorsqu'on range $x_1, \dots, x_n$ par ordre croissant. Ainsi, $s_1(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit élément de la liste et $s_n(x_1, \dots, x_n)$ est le plus grand élément de la liste.
On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, on note Y_k la variable aléatoire égale à $s_k(X_1, \dots, X_n)$.

1. Soit x un réel. On note $N(x)$ la variable aléatoire égale au nombre d'indices i de $\{1, \dots, n\}$, tels que $X_i \leq x$.
   Déterminer la loi de $N(x)$.
2. Soit k un entier de $\{1, \dots, n\}$.
   (a) Soit x un réel. Exprimer l'événement $[Y_k \leq x]$ à l'aide de $N(x)$.
   (b) En déduire que la fonction de répartition de Y_k est définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, G_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
   (c) On admet que Y_k est une variable à densité.
   Vérifier qu'une densité de Y_k est la fonction g_k définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) = \begin{cases} n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (d) Justifier que pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, Y_k admet une espérance et montrer que $E(Y_k) = \dfrac{k}{n+1}$.

Exercice 2.

On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$.
Pour tout nombre réel $x \geq -1$, on pose :
$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x \cos^2 u}\, \mathrm{d}u.$$

1. Calculer $F(-1)$ et $F(0)$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \geq -1$, $F(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x \sin^2 t}\, \mathrm{d}t$.

(b) En déduire que, pour tout $x > -1$:

$$F(x) = \sqrt{1+x} \times F \quad \frac{-x}{1+x} \quad .$$

3. Montrer que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq x_1 \leq x_2$, on a :

$$0 \leq F(x_2) - F(x_1) \leq \frac{1}{4}(x_2 - x_1).$$

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $-1 < x < 0$, on a :

$$0 \leq F(x) - F(-1) \leq \frac{1}{2}\sqrt{1+x}.$$

5. (a) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
   (b) En déduire que F est continue sur $]-1, 0[$.
   (c) F est-elle continue en 0 ?
6. (a) Montrer que F est continue à droite en -1.
   (b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F(x)$ est équivalente à $\lambda\sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit a un réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{c}{\pi(x^2+a)}$$

1. Déterminer la valeur de c pour laquelle f est une densité de probabilité.

Dans la suite X désigne une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.

2. X admet-elle une espérance ?
3. (a) Déterminer la fonction de répartition de X. On la notera F.
   (b) Montrer que F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. Donner l'expression de F^{-1}, la bijection réciproque de F.
   (c) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
   On pose $Y = F^{-1}(U)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   Montrer que Y suit la même loi que X.
4. On définit Z par : $Z = \ln|X|$ et on admet que Z est une variable aléatoire à densité.
   (a) Déterminer une densité de Z.
   (b) Z admet-elle une espérance ?

Exercice 2.
On considère deux entiers naturels $n \geq 1$ et $m \geq 1$. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont munis de leur produit scalaire canonique et $\|\cdot\|$ est la norme associée.
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. On note alors $f^*\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire de matrice ${}^tA$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Montrer que f^* est l'unique application linéaire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $y \in \mathbb{R}^m$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle (f^* \circ f)(x), x\rangle = \|f(x)\|^2$.

Dans la suite de l'exercice on suppose $n \leq m$ et f injective.

2. Montrer que $f^* \circ f$ est une bijection.
3. On note $p\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la projection orthogonale sur l'image de f.
   (a) Soit $z \in \mathbb{R}^m$, montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(x), z - f(u)\rangle = 0$.
   (b) En déduire que $p = f \circ (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$.
   Indication : en reprenant les notations de la question précédente, on pourra considérer $x = f^*(z - f(u))$.
4. On note $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $\tilde{f} = (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$.
   (a) Déterminer $\tilde{f} \circ f$ et $f \circ \tilde{f}$.
   (b) Soit $b \in \mathbb{R}^m$ fixé. On considère le système d'inconnu $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = b$. On appelle solution des moindre carrés du système, le vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|f(x_0) - b\|$ est la distance de b à $\operatorname{Im} f$.
   Montrer que $x_0 = \tilde{f}(b)$.

5. *Un exemple.* On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calculer $\tilde{A}$ la matrice de $\tilde{f}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ le système

$$(S)\colon \quad \begin{cases} 2x + y & = 1 \\ x - y & = 2 \\ x + 3y & = a \end{cases}$$

   a-t-il des solutions ?

   (c) Dans le cas où (S) n'a pas de solution, déterminer la solution des moindre carrés de (S) en fonction de a.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère deux dés équilibrés, l'un est blanc et l'autre est noir.
On effectue une succession de lancers de ces deux dés et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6 avec le dé blanc et Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6 avec le dé noir.

1. Donner les lois de X et Y et préciser l'espérance et la variance de chacune de ces variables.
2. Pour tout entier naturel non nul n, déterminer $P(X > n)$.

Dans la suite, on note S la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6 avec l'un des deux dés. On définit également $T = Y - X$.

3. Soit n un entier naturel non nul. Calculer $P(S > n)$. En déduire la loi de S et son espérance.
4. Pour tout entier naturel non nul n et tout entier relatif r, calculer $P([S = n] \cap [T = r])$.
5. En déduire la loi de T.
6. Montrer que T admet une espérance et une variance et les calculer.
7. Déterminer la covariance de S et T.
   Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.
On considère la suite $(u_p)_{p\geq 1}$ définie, pour tout entier $p \geq 1$, par

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.

1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.
2. En déduire que la série de terme général u_p converge et que sa somme γ vérifie $0 \leq \gamma \leq 1$.
3. Montrer que, pour tout $p \geq 1$,
$$u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+u} \,\mathrm{d}u.$$
4. En déduire que, pour tout $p \geq 2$,
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \quad \leq u_p \leq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \quad .$$
5. Pour tout $n \geq 1$, on note $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.
   Déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.
6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre H_n et S_n.

(b) Montrer que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \gamma - T_n \leq \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

   (b) Déterminer un entier naturel n_0 pour lequel T_{n_0} est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On note $E = \mathbb{R}^3$. On note Id l'endomorphisme identité de E.
Soit f un endomorphisme de E.
On suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul, qu'il est non bijectif et qu'il vérifie $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + Id)$. Comparer de même $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2 + Id)$
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + Id)$.
3. (a) Justifier qu'il existe un vecteur non nul x appartenant à $\mathrm{Ker}(f^2 + Id)$ et montrer alors que la famille $(x, f(x))$ est libre.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f^2 + Id)$.
4. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2.
On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}.$$
On admet que c'est un espace vectoriel.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}$ qui converge. Que peut-on dire de sa limite ?

On considère dans la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathscr{S}$ définies par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$.
On définit aussi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 0$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $b_n \geq 2^{n-1}$.

On peut donc définir la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ par, pour tout $n \geq 1$, $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

4. (a) Montrer que la série de terme général $(q_n - q_{n+1})_{n\geq 1}$ est absolument convergente.
   (b) En déduire que $(q_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera ℓ sa limite dans la suite.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{2n+1} \leq \ell \leq q_{2n}$.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$. On admet dans la suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a_n + u_1 b_n$.
   (a) Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 \ell + u_1 \neq 0$.
   (b) On suppose maintenant que $u_0 \ell + u_1 = 0$.
      i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|q_n - \ell| \leq \dfrac{1}{b_n b_{n+1}}$.
      ii. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel.
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ désignent des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, on note :

$$R = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), e_i \rangle \text{ et } S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle u(e_i), f_j \rangle^2$$

1. Montrer que R et S ne dépendent pas des bases orthonormées choisies.
2. Calculer la valeur de S lorsque u est un projecteur orthogonal et que $\mathrm{rg}(u) = r$.

Exercice 2.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n} \dbinom{2n}{n}$. Dans la suite, on pourra admettre la formule de Stirling :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.$$
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
   (d) i. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a + b)^2 \geq 4ab$.
   ii. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 \leq \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}.$$
   (e) i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}.$$
   ii. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $p \geq k$,
$$0 \leq a_p - a_k \leq \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}.$$
   iii. En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$,
$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leq \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}.$$

2. Soit $(O;\vec{i})$ un axe gradué. Tous les instants considérés sont des nombres entiers naturels.

   Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$, saute à chaque instant sur le point d'abscisse $k+1$ ou sur le point d'abscisse $k-1$, avec la même probabilité. Chaque saut est indépendant du précédent. La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.

   On note, pour un entier $k \geq 1$, Z_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et, pour tout $n \geq 1$, N_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer N_n en fonction des variables aléatoires Z_k.

   (b) i. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $P(Z_{2k+1} = 1) = 0$.

   ii. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_{2k} = 1) = \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k}$.

   (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$E(N_n) = \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1.$$

   (d) En déduire un équivalent de $E(N_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}.$$

1. *Question préliminaire :*
   Soient X et Y deux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que :
   $$\begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + 2AY \\ AX + 2AY \end{pmatrix}$$
2. Dans cette question, on étudie le cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner les valeurs propres de A.
   (b) Justifier que A est diagonalisable.
   (c) Montrer que 0 est valeur propre de B et donner la dimension du sous-espace propre associé.
   (d) Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
   Trouver un vecteur propre de B.
   (e) La matrice B est-elle diagonalisable ?
3. On revient au cas général et on suppose que A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et de rang égal à n.
   (a) Reprendre les questions 2(c) à 2(e) dans le cas où A admet n valeurs propres distinctes.
   (b) Reprendre les questions 2(c) à 2(e) dans le cas où A admet moins de n valeurs propres distinctes.

Exercice 2.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.
   On pose aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer v_n en fonction de n.
   (b) Montrer que la série de terme général v_n converge.
   (c) En déduire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$.
2. On considère un ensemble Ω muni d'une probabilité P et une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) > 0$.
   Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a :
   $$\prod_{j=1}^{n-1} P\left(A_{j+1} \quad \bigcap_{k=1}^{j} A_k\right) = \frac{P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j\right)}{P(A_1)}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. On suppose qu'à chaque tirage, les boules sont prélevées de l'urne avec la même probabilité.

   Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note E_j l'événement « on obtient une boule de chaque couleur au j-ième tirage ».

   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur au premier tirage.

   (b) Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2|E_1)$.

   (c) Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, exprimer $P\left(E_{j+1} \quad \bigcap_{k=1}^{j} E_k\right)$ en fonction de n et de j.

   (d) Quelle est la probabilité p_n que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

   (e) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$.
On peut donc écrire P sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \text{ où } a_n \neq 0.$$

Soient $z_0, \ldots, z_n$ les racines $(n+1)$-ème de l'unité, c'est-à-dire les complexes solutions de l'équation $z^{n+1} = 1$. On définit alors M par :

$$M = \sup\{|P(z_k)| \mid k \in \{0, 1, \ldots, n\}\}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{n+1} = 1$ et montrer que l'on peut choisir z_1 de telle sorte que :
$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ z_k = z_1^k.$$
2. Montrer que $M > 0$.
3. Soit p un entier naturel.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k^p$ en fonction de p.
4. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(z_k) \ \leq (n+1)M$$
et en déduire que $|a_0| \leq M$.
5. Soit i un entier de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que :
$$(n+1)a_i = \sum_{k=0}^{n} P(z_k) z_k^{-i}$$
6. En déduire que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_i| \leq M$.

Exercice 2.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right.$.

1. *Questions préliminaires.*
   (a) Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $1 + h \leq e^h$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^n \geq 1 + n(x-1)$.
2. Montrer que la série de terme général a_n est convergente.
On note sa somme S dans la suite.

3. *Expression de S avec des intégrales.*
   On considère les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que I et J sont convergentes.

   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (1-u)^n}{u}\, \mathrm{d}u.$$

   (c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1 - h_n(t)}{t}\, \mathrm{d}t - \int_1^n \frac{h_n(t)}{t}\, \mathrm{d}t,$$

   où, pour tout $t \in [0, n]$, $h_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

   (d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq h_n(t) \leq e^{-t}.$$

   (e) En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq e^{-t} - h_n(t) \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

   (f) i. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - [I - J] = \int_0^n \frac{e^{-t} - h_n(t)}{t}\, \mathrm{d}t - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

   ii. En déduire que $S = I - J$.