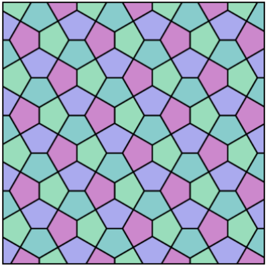
L'art complexe des puzzles à une pièce

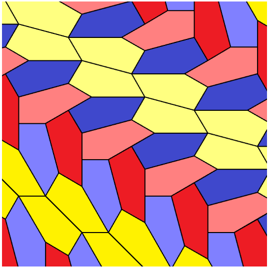
Michaël Rao

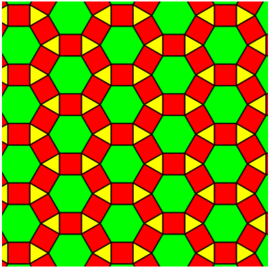
CNRS - ENS Lyon
LIP - Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme
équipe MC2

Café Gourmand et Scientifique

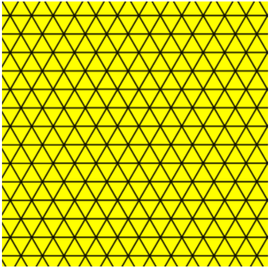
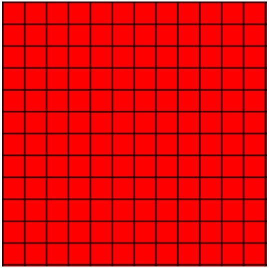
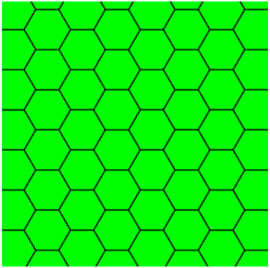
Pavage : partition du plan par des éléments d'un ensemble fini, appelées **tuiles**



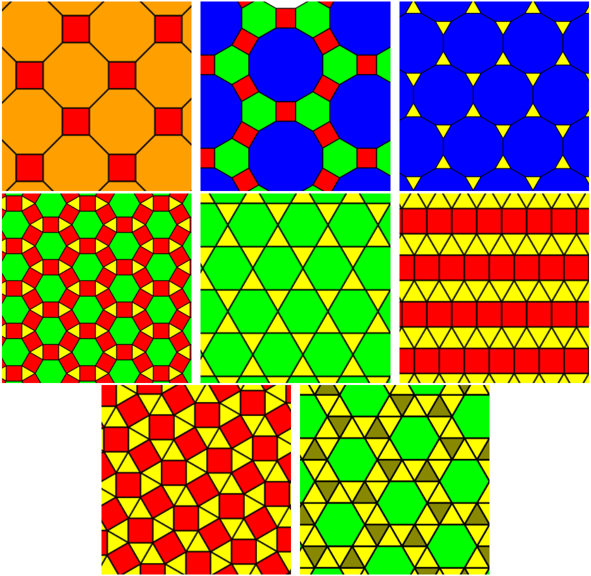




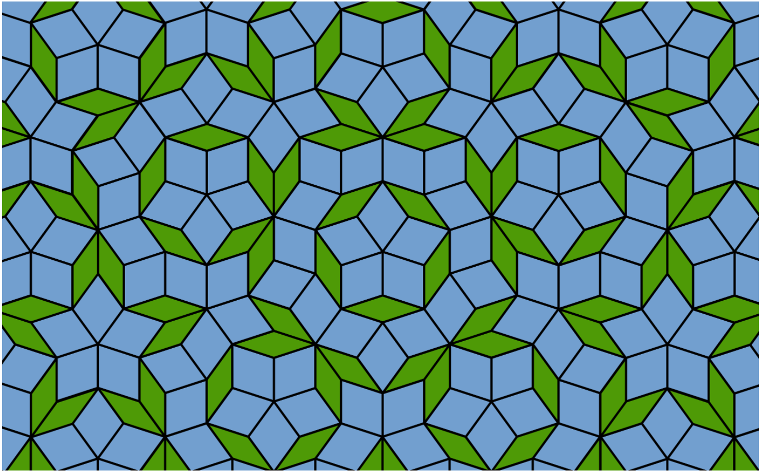
Pavages avec un polygone régulier

Pavages « semi-réguliers »



Pavage de Penrose



Pavage de Penrose

Roger Penrose, Institut Mitchell, Texas A&M University

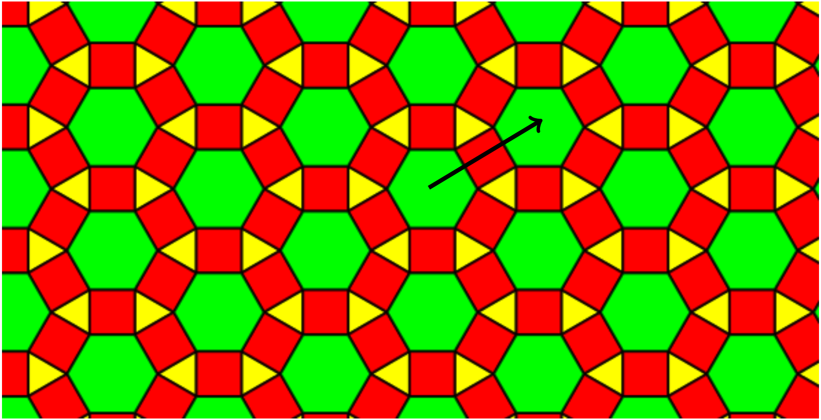
Pavage de Penrose

Réalisation de Thomas Fernique et Evgeny Poloskin

http://images.math.cnrs.fr/Un-parquet-de-Penrose.html

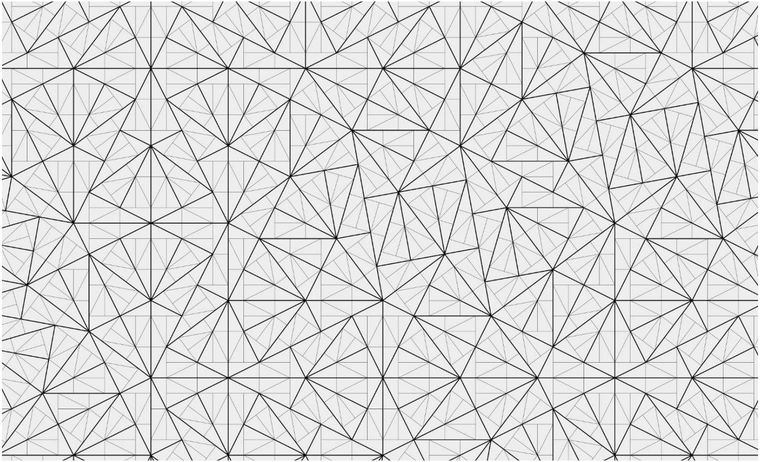
Pavages apériodiques

Pavage périodique : il existe une translation laissant le pavage invariant



Pavage apériodique : il n'existe pas de telle translation

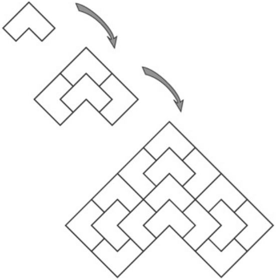
Pavage de Pinwheel

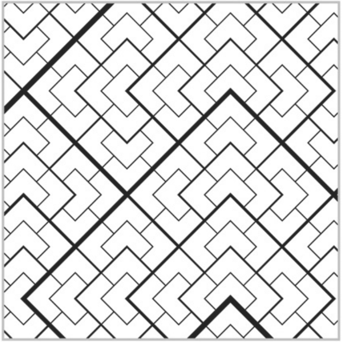


Pavage de Pinwheel

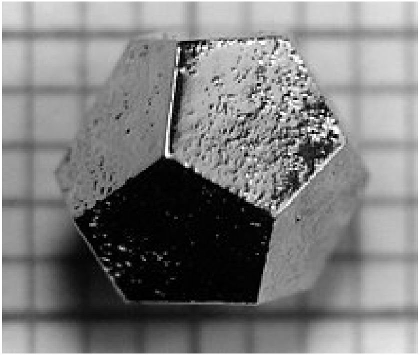
Federation Square (Melbourne, Australie)

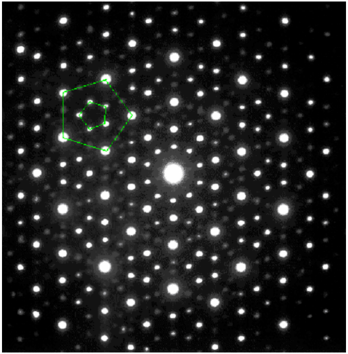
Pavage de la chaise





Dans la nature





Quasi-cristal : cristal dont la structure n'est pas périodique.

Découvert en 1982 par Dan Shechtman. Prix Nobel de chimie en 2011.

Quasi-cristal naturel découvert en 2009 dans des montagnes de Koriakie (Russie).

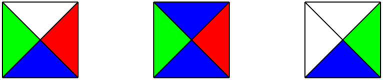
Forcer l'apériodicité & décorations

Comment « forcer » un pavage apériodique ?

Un jeu de tuiles est dit **apériodique** s'il pave le plan, et <u>tous</u> les pavages sont apériodiques.

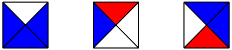
Décorations : couleurs ou formes des bords qui autorisent ou interdisent certains agencements.

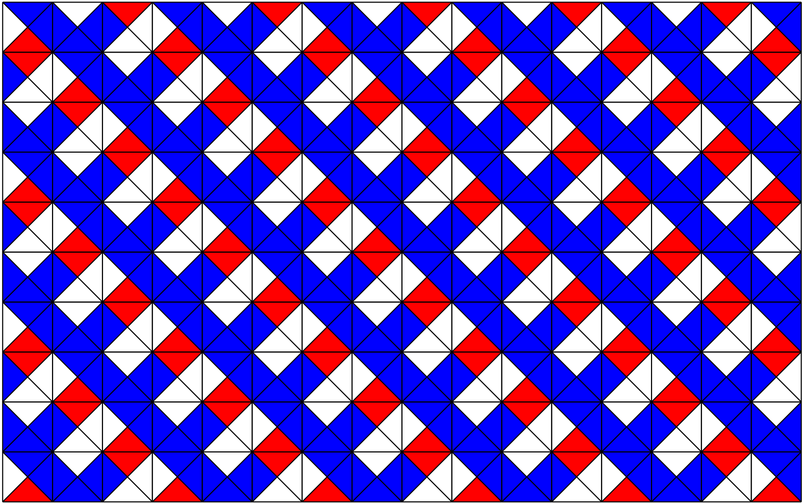
Une **tuile de Wang** : tuile carrée avec des couleurs sur les bords
Exemples :



Un **jeu de tuiles de Wang** est un ensemble de tuiles de Wang

On cherche à paver <u>en respectant les couleurs des bords</u> (sans rotations)

Jeu : 



Conjecture (Wang 1961)

Si un jeu de tuiles pave, alors il pave périodiquement

Faux :

Théorème (Berger 1966)

Il existe un jeu de tuiles qui pave uniquement apériodiquement

Liens avec des questions de calculabilité/décidabilité en informatique

Eternity II

- 2 millions de dollars pour le premier qui résout ce puzzle...

Tuiles de Wang : historique

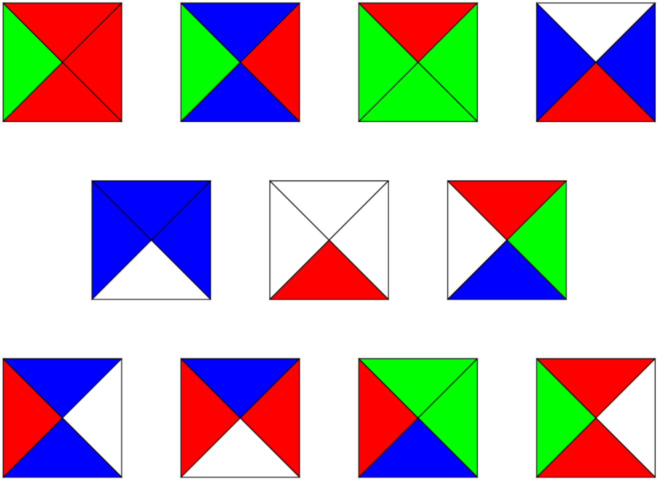
Recherche du plus petit jeu de tuiles de Wang apériodique :

- Berger : 20426 tuiles en 1966 (descendu à 104 plus tard)
- Knuth : 92 tuiles en 1968
- Robinson : 56 tuiles en 1971
- Ammann : 16 tuiles en 1971
- Grunbaum : 24 tuiles en 1987
- Kari et Culik : 14 tuiles, puis 13 tuiles, en 1996

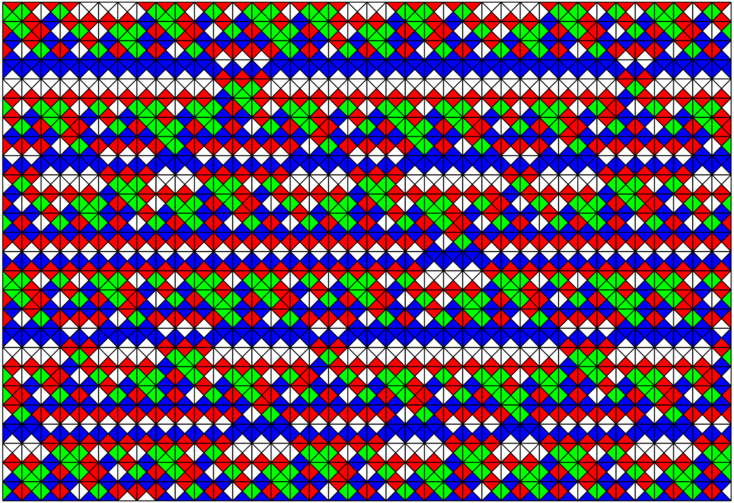
Pour trouver le minimum : **recherche exhaustive** par ordinateur

- Jeandel et Rao : 11 tuiles (le plus petit possible), en 2015 (24 ans de calcul... merci le LIP et le PSMN !)

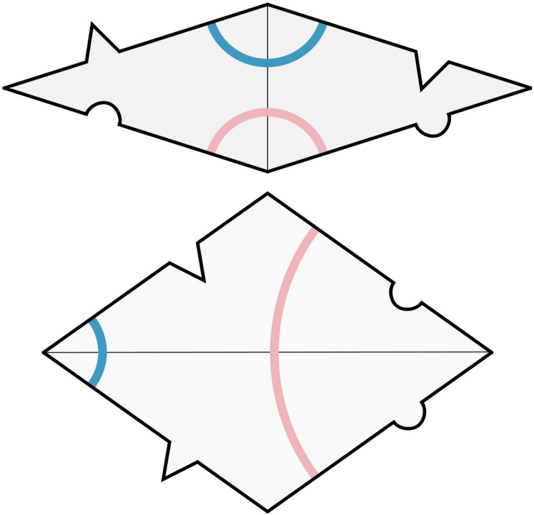
Plus petit jeu de tuiles de Wang apériodique



Plus petit jeu de tuiles de Wang apériodique



Penrose avec décorations



Pavage apériodique à une tuile ?

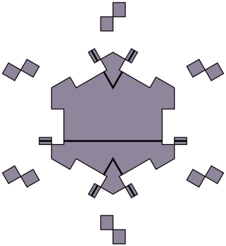
Il existe des jeux apériodiques à deux tuiles (par exemple : Penrose, Ammann–Beenker...)

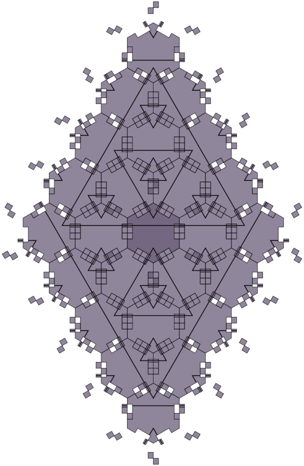
Existe-t-il <u>une</u> unique tuile qui pave apériodiquement le plan ?

$\Rightarrow$ Problème d'« ein-stein » (une pierre)

Tuile de Taylor-Socolar (2011)

Une tuile qui pave apériodiquement le plan :





Pavage apériodique à une tuile connexe ?

Existe-t-il une tuile <u>connexe</u> qui pave apériodiquement ?

Comme pour les tuiles de Wang : tenter la recherche exhaustive par ordinateur.

L'espace est très (trop) grand... On peut déjà se limiter aux tuiles convexes.

Existe-t-il une tuile <u>convexe</u> qui pave apériodiquement ?

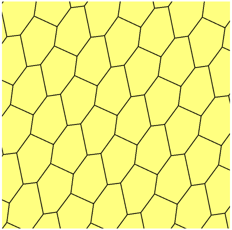
Paver le plan avec des polygones convexes

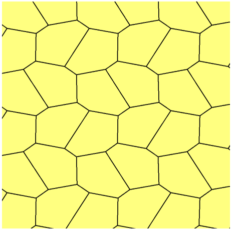
Question de 1918 de Karl Reinhardt :

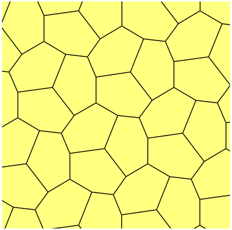
Quelle tuile convexe pave le plan ?

$\Rightarrow$ Seul cas ouvert : les pentagones

- Tous les triangles et quadrilatères pavent le plan.
- Il n'existe pas de polygone convexe à 7 côtés ou plus qui pave le plan.
- 3 types d'hexagones qui pavent le plan :





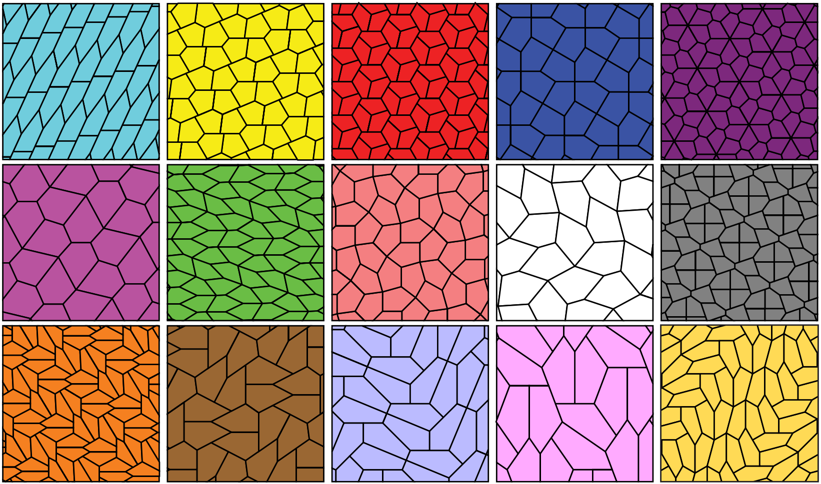


Pentagones : histoire

De 1918 à 2015, 15 types des pentagones convexes pavant le plan ont été trouvés :

- Reinhardt (1918) : Types 1 à 5
- Kershner (1968) : Types 6, 7, 8
  et annonce, sans preuve, que la liste est complète
- James (1975) : Type 10
- Rice (1977) : Types 9, 11, 12 et 13
- Stein (1985) : Type 14
- Mann, McLoud & Von Derau (2015) : Type 15.

Pentagones qui pavent le plan



Recherche exhaustive par ordinateur :

- Classer les types possibles dans un univers fini (371 familles).
- Rechercher, pour chaque famille, les pavages possibles : force brute, par ordinateur.
- Résultat : seulement les 15 types connus.

Pentagones : Fin d'un problème

Recherche exhaustive par ordinateur :

- Pas de nouvelle tuile, donc pas de tuile apériodique convexe ☹
- Mais les techniques développées fonctionnent aussi pour les non-convexes ☺
- Clôture d'une question centenaire ☺
- Mais nécessitant une preuve longue par ordinateur ☹
- Couverture médiatique ☺

Merci !

Café / Questions ?

- Pavages (semi-)réguliers, par hexagones, et le 15eme type de pentagones : by Tomruen [CC BY-SA 4.0], from Wikimedia Commons
- Roger Penrose : by Solarflare100 [CC BY 3.0], from Wikimedia Commons
- Penrose décoré : Geometry guy [CC BY-SA 3.0], via Wikimedia Commons
- Eternity II : by Matěj Baťha [CC BY-SA 2.5], from Wikimedia Commons
- Pinwheel : by Levochik [CC BY-SA 3.0], from Wikimedia Commons
- Federation Square : by Donaldytong [CC BY-SA 3.0], from Wikimedia Commons
- Taylor-Socolar : by Parcly Taxel [CC BY-SA 4.0], from Wikimedia Commons
- Pavages pentagonaux : by EdPeggJr [CC BY-SA 4.0], from Wikimedia Commons