Journal de physique et de chimie des étudiants

Volume 1. No. 1. - Février 2016
Pages 7 - 12

Observateurs accélérés en relativité restreinte

Benjamin Crinquand

L'étude de la relativité restreinte se limite la plupart du temps aux référentiels inertiels. Le but de cet article est de montrer que cette théorie est aussi adaptée aux observateurs non-inertiels. On décrira ici quelques aspects de la physique des observateurs accélérés. En particulier, on établira un résultat qui permet d'appréhender plus simplement un effet de relativité générale, compte tenu du principe d'équivalence : deux horloges fixes l'une par rapport à l'autre dans un référentiel uniformément accéléré se désynchronisent constamment.

1. Rappels

La théorie présentée dans cet article est essentiellement tirée de [1].

Ligne d'univers : L'espace-temps de Minkowski $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est défini comme un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 4 muni de la métrique $\mathbf{g}$. Si on introduit une base orthonormale $(\boldsymbol{e_0}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$, on peut définir la matrice du tenseur métrique par $g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\boldsymbol{e_\alpha}, \boldsymbol{e_\beta}) = \eta_{\alpha\beta}$, où η est la matrice :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ainsi, si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$, leur produit scalaire s'écrit :

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = u^0 v^0 - \sum_{i=1}^{3} u^i v^i.$$

Un vecteur $\boldsymbol{u}$ est dit de genre temps si $\mathbf{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$, de genre espace si $\mathbf{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) < 0$ et de genre lumière si $\mathbf{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$.

On peut alors énoncer deux postulats pour relier cet espace mathématique à l'espace physique :

1. Toute particule massive peut être représentée par une ligne d'univers $\mathscr{L}$, qui est une courbe de classe C^2 par morceaux

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ \lambda &\longmapsto A = \phi(\lambda) \end{aligned}$$

   telle que tout vecteur tangent à cette courbe soit de genre temps.

2. Toute particule de masse nulle (en particulier un photon) est représentée dans $\mathcal{E}$ par une droite dirigée par un vecteur de genre lumière.

Quadri-vitesse et quadri-accélération : On peut à présent donner la définition du temps propre pour une particule massive. Soient deux événements infiniment voisins $A = \phi(\lambda)$ et $A' = \phi(\lambda + d\lambda)$ sur la ligne d'univers $\mathscr{L}$ d'une particule, et soit $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{AA'}$ le vecteur infinitésimal les joignant. Par définition d'une ligne d'univers, $\mathbf{g}(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}) > 0$. On suppose que A' est dans le futur de A. On définit alors :

$$d\tau = \frac{1}{c} \|d\boldsymbol{x}\|_g = \frac{1}{c} \sqrt{\mathbf{g}(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x})}.$$

$d\tau$ est l'intervalle de temps propre écoulé entre A et A'. Au facteur c près qui lui donne la dimension d'un temps, il s'interprète comme la longueur de la ligne d'univers entre A et A'. On remarque que si $\boldsymbol{v}$ est le vecteur tangent à $\mathscr{L}$ en A dirigé vers le futur, on a $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} d\lambda$. L'intervalle de temps propre peut donc s'écrire :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{\mathbf{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} d\lambda. \tag{2}$$

Parmi tous les champs de vecteurs tangents à $\mathscr{L}$, il existe un champ de vecteurs indépendant de tout paramétrage, intrinsèque à la ligne d'univers. La quadri-vitesse de la particule matérielle décrite par $\mathscr{L}$ est définie avec les notations précédentes par :

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}.$$

D'après l'Équation 2, on a $\boldsymbol{u} = c \dfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\mathbf{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}} = c \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{g}}}$, d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = c^2}.$$

Ainsi, $\boldsymbol{u}$ est un vecteur de genre temps. La quadri-accélération peut de même être définie par :

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{u}}{d\tau}.$$

Puisque la norme de $\boldsymbol{u}$ est constante, on en déduit que la quadri-accélération est orthogonale à la quadri-vitesse :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

Ainsi, si $\boldsymbol{a}$ est non nul, la quadri-accélération est un vecteur de genre espace.

2. Définition d'un observateur accéléré

De manière générale, la notion de référentiel renvoie à l'étiquetage de l'espace-temps par un quadruplet de nombres réels (ct, x^1, x^2, x^3), réalisé par un observateur auquel est attribué une ligne d'univers $\mathscr{L}_0$. On définit donc un référentiel local $\mathcal{O}$ le long de $\mathscr{L}_0$ par un quadruplet de vecteurs $(\boldsymbol{e}_0(t), \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t))$ défini en tout point de $O(t) \in \mathscr{L}_0$, qui est de classe C^1, qui est une base orthogonale directe de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ pour tout $O(t)$ et tel que $\boldsymbol{e}_0 = \frac{1}{c}\boldsymbol{u}$, où $\boldsymbol{u}$ est la quadri-vitesse de l'observateur. Les coordonnées spatiales x^i d'un événement M repéré par $\mathcal{O}$ sont donc définies par $\boldsymbol{O(t)M} = x^i \boldsymbol{e}_i(t)$.

Ce référentiel local évolue le long de la ligne d'univers. On peut prouver qu'il existe un unique vecteur $\boldsymbol{\omega}$ tel que l'évolution de la base de vecteurs (tétrade) en fonction du temps propre soit donnée par l'Équation 3. Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est appelé quadri-rotation de l'observateur $\mathcal{O}$, c'est un vecteur de genre espace orthogonal à $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{c}\underbrace{((\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{u})}_{\text{Courbure due à l'accélération}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_\alpha}_{\text{Rotation spatiale}} . \quad (3)$$

On peut finalement définir un observateur uniformément accéléré comme vérifiant les propriétés suivantes :

1. Sa ligne d'univers est comprise dans un plan Π de l'espace-temps $\mathcal{E}$
2. La norme de l'accélération $a = \|\boldsymbol{a}\|_g = \sqrt{-\mathbf{g}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ est constante le long de la ligne d'univers
3. Sa quadri-rotation $\boldsymbol{\omega}$ est nulle [1].

Remarque : Une définition plus simple aurait été de choisir le vecteur $\boldsymbol{a}$ constant. Cela aboutirait à $\boldsymbol{u}(t) = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}(0)$. Or on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{u}(t) &= t^2 \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + 2t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{u}(0) \cdot \boldsymbol{u}(0) \\ &= t^2 \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + c^2. \end{aligned}$$

Puisque l'on doit avoir $\forall t, \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{u}(t) = c^2$, cela impose $\boldsymbol{a} = 0$. Ce cas est donc beaucoup trop restreint.

3. Équation de la ligne d'univers

On nomme Π le plan contenant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les vecteur $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{a}$. On introduit un observateur inertiel $\mathcal{O}_*$, de référentiel local $(\boldsymbol{e}^*_\alpha)$ et de temps propre t_*, tel que $\Pi = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{e}^*_0, \boldsymbol{e}^*_1)$ et tel qu'à $t_* = 0$, les lignes d'univers sont tangentes au point $O(0)$, origine du temps propre t pour $\mathcal{O}$. On a alors $\boldsymbol{u}(0) = c\, \boldsymbol{e}^*_0$ et $\boldsymbol{a}(0) = a\, \boldsymbol{e}^*_1$ (avec $a > 0$ une constante). On peut écrire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(t) = u^0(t)\boldsymbol{e}^*_0 + u^1(t)\boldsymbol{e}^*_1 & , \quad (u^0(t))^2 - (u^1(t))^2 = c^2 \\ \boldsymbol{a}(t) = a^0(t)\boldsymbol{e}^*_0 + a^1(t)\boldsymbol{e}^*_1 & , \quad (a^0(t))^2 - (a^1(t))^2 = -a^2 \end{cases}$$

De cela, on déduit $a^1 = \sqrt{a^2 + (a^0(t))^2}$ et $u^0 = \sqrt{c^2 + (u^1(t))^2}$. De plus, $a^k(t) = \frac{du^k}{dt}$, d'où on tire après quelques manipulations :

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + (u^1)^2}} \frac{du^1}{dt} = a, \quad (4)$$

en utilisant que $u^0 > 0$ et $a^1 > 0$. L'Équation 4 ci-dessus s'intègre en $u^1(t) = c\, \sinh(\frac{at}{c})$, d'où le résultat final :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(t) &= c\, (\cosh(\frac{at}{c})\, \boldsymbol{e}^*_0 + \sinh(\frac{at}{c})\, \boldsymbol{e}^*_1) \\ \boldsymbol{a}(t) &= a\, (\sinh(\frac{at}{c})\boldsymbol{e}^*_0 + \cosh(\frac{at}{c})\, \boldsymbol{e}^*_1) \end{cases} \quad (5)$$

Introduisons les coordonnées inertielles $(x^\alpha_*) = (ct_*, x_*, y_*, z_*)$ associées à $\mathcal{O}_*$. On peut écrire l'équation de la ligne d'univers de $\mathcal{O}$, $X^\alpha_*(t) = x^\alpha_*$, dans ces coordonnées. Le paramètre choisi est le temps propre de $\mathcal{O}$. Par définition de la quadri-vitesse, $u^\alpha(t) = \frac{dX^\alpha_*}{dt}$. En tenant compte des conditions initiales $X^0_* = 0$ et $X^1_*(0) = 0$, on aboutit finalement à l'équation paramétrique de $\mathscr{L}_0$:

$$\begin{cases} ct_* &= X^0_*(t) &= \frac{c^2}{a}\sinh(\frac{at}{c}) \\ x_* &= X^1_*(t) &= \frac{c^2}{a}(\cosh(\frac{at}{c}) - 1) \\ y_* &= X^2_*(t) &= 0 \\ z_* &= X^3_*(t) &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, du point de vue d'un observateur inertiel, la ligne d'univers d'un observateur uniformément accéléré est une hyperbole équilatère, contenue dans le plan (ct_*, x_*), d'équation :

$$(\frac{ax_*}{c^2} + 1)^2 - (\frac{at_*}{c^2})^2 = 1.$$

Cette ligne d'univers est représentée sur la Figure 1. Ses asymptotes sont les droites d'équation $ct_* = \pm(x_* + \frac{c^2}{a})$. Ce résultat appelle une remarque importante. On rappelle que la ligne d'univers d'un photon est une droite inclinée à 45 ° par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, comme on peut le voir sur la Figure 1, un photon émis au-dessus de l'asymptote $ct_* = x_* + \frac{c^2}{a}$ n'atteindra jamais la ligne d'univers de $\mathcal{O}$. Cette région est donc invisible pour cet observateur. La propriété ainsi mentionnée peut être généralisée en dehors du plan (ct_*, x_*) : tout émetteur situé à $t_* = 0$ en $(x^{em}_*, y^{em}_*, z^{em}_*)$ tel que $x^{em}_* < -\frac{c^2}{a}$ ne peut émettre de photons vers l'observateur $\mathcal{O}$. L'hyperplan d'équation $ct_* = x_* + \frac{c^2}{a}$ est alors appelé *horizon de Rindler.*

4. Synchronisation des horloges et effet Einstein

Venons-en maintenant à un aspect intrigant de ces observateurs. Considérons, outre l'observateur $\mathcal{O}$ précédemment introduit, un observateur $\mathcal{O}'$ fixe par rapport à $\mathcal{O}$

1. Il faut prendre garde au fait que l'opérateur produit vectoriel utilisé précédemment agit sur un espace à 4 dimensions. Sa définition rigoureuse fait intervenir le tenseur de Levi-Civita.

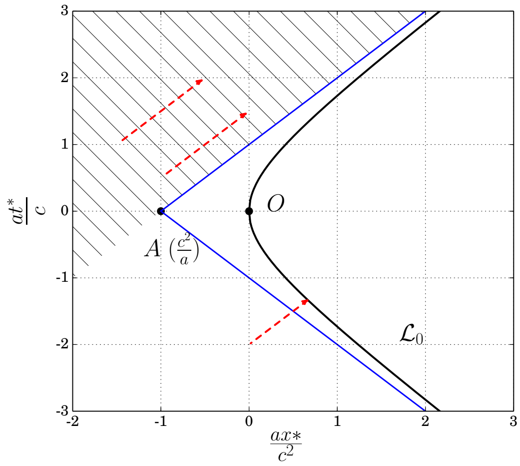

Fig. 1 Ligne d'univers (en noir) d'un observateur uniformément accéléré, tracée dans les coordonnées $(\frac{ax_*}{c^2}, \frac{at_*}{c})$ d'un observateur inertiel. Les droites bleues correspondent aux asymptotes de l'hyperbole. La zone hachurée se trouve derrière l'horizon de Rindler. Des photons émis dans cette zone (flèches rouges) n'atteindront jamais l'observateur $\mathcal{O}$.

(ses coordonnées dans le référentiel local associé à $\mathcal{O}$ sont constantes le long de l'univers). Il faut donc d'abord exprimer en fonction des coordonnées inertielles les coordonnées locales de $\mathcal{O}$.

Référentiel local de l'observateur uniformément accéléré : On définit le référentiel local de $\mathcal{O}$ de la façon suivante : $\boldsymbol{e}_0(t) = c\boldsymbol{u}_0(t)$, $\boldsymbol{e}_1(t) = \frac{1}{a}\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{e}_2(t) = \boldsymbol{e}_2^*$ et $\boldsymbol{e}_3(t) = \boldsymbol{e}_3^*$. On vérifie aisément que cette tétrade est bien une base orthonormale de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ et que sa quadri-rotation est nulle, et est donc éligible pour constituer le référentiel de $\mathcal{O}$.

Les coordonnées (ct, x, y, z) associées au référentiel local de $\mathcal{O}$ sont appelées coordonnées de Rindler. Soit un événement M, de coordonnées inertielles (t_*, x_*, y_*, z_*), et repéré par l'observateur $\mathcal{O}$ via $\boldsymbol{O(t)M} = x\boldsymbol{e}_1(t) + y\boldsymbol{e}_2(t) + z\boldsymbol{e}_3(t)$. On écrit $\overrightarrow{O(0)M}$ de deux façons, en utilisant le résultat de l'Équation 5.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O(0)M} &= ct_*\boldsymbol{e}_0^* + x_*\boldsymbol{e}_1^* + y_*\boldsymbol{e}_2^* + z_*\boldsymbol{e}_3^* \\
&= \overrightarrow{O(0)O(t)} + \overrightarrow{O(t)M} \\
&= X_*^\alpha(t)\boldsymbol{e}_\alpha^* + x\boldsymbol{e}_1(t) + y\boldsymbol{e}_2(t) + z\boldsymbol{e}_3(t) \\
&= \frac{c^2}{a}\sinh(\frac{at}{c})\boldsymbol{e}_0^* + \frac{c^2}{a}(\cosh(\frac{at}{c}) - 1)\boldsymbol{e}_1^* \\
&\quad + x(\sinh(\frac{at}{c})\boldsymbol{e}_0^* + \cosh(\frac{at}{c})\boldsymbol{e}_1^*) + y\boldsymbol{e}_2^* + z\boldsymbol{e}_3^* \\
&= (x + \frac{c^2}{a})\sinh(\frac{at}{c})\boldsymbol{e}_0^* \\
&\quad +((x + \frac{c^2}{a})\cosh(\frac{at}{c}) - \frac{c^2}{a})\boldsymbol{e}_1^* + \ y\boldsymbol{e}_2^* + z\boldsymbol{e}_3^*
\end{aligned}$$

Cela permet d'aboutir, pour $x > -\dfrac{c^2}{a}$ et $t \in \mathbb{R}$, aux coordonnées de Rindler :

$$\left\{\begin{array}{lcl} ct_* &=& (x + \frac{c^2}{a})\sinh(\frac{at}{c}) \\ x_* &=& (x + \frac{c^2}{a})\cosh(\frac{at}{c}) - \frac{c^2}{a} \\ y_* &=& y \\ z_* &=& z \end{array}\right. \tag{6}$$

Décalage des horloges : Ainsi, si les coordonnées (constantes) de $\mathcal{O}'$ par rapport à $\mathcal{O}$ sont (x_0, y_0, z_0), sa ligne d'univers $\mathscr{L}_0'$ est obtenue à partir des coordonnées de Rindler décrites par l'Équation 6 :

$$\left\{\begin{array}{lcl} ct_* &=& (x_0 + \frac{c^2}{a})\sinh(\frac{at}{c}) \\ x_* &=& (x_0 + \frac{c^2}{a})\cosh(\frac{at}{c}) - \frac{c^2}{a} \\ y_* &=& y_0 \\ z_* &=& z_0 \end{array}\right. \tag{7}$$

La ligne d'univers de $\mathcal{O}'$ est tracée sur la Figure 2. $\mathcal{O}'$ est

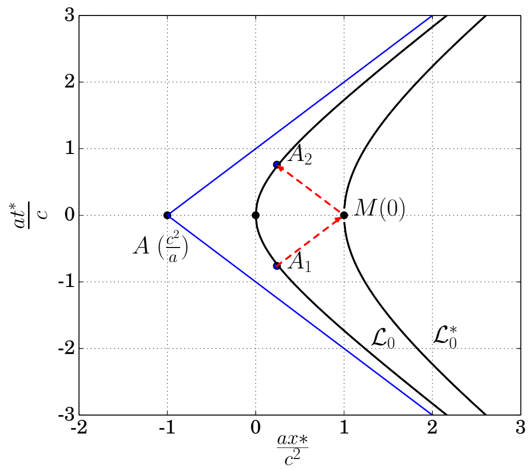

Fig. 2 Lignes d'univers de l'observateur uniformément accéléré $\mathcal{O}$ et de l'observateur comobile $\mathcal{O}'$, situé en $(x_0, 0, 0)$ par rapport à $\mathcal{O}$. La figure a été tracée pour $\frac{ax_0}{c^2} = 1$. L'observateur $\mathcal{O}'$ réémet en $M(0)$ un photon reçu par $\mathcal{O}$ en A_2.

donc également un observateur uniformément accéléré. Il faut prendre garde au fait que malgré l'utilisation de t pour le paramétrage de $\mathscr{L}_0'$, t est le temps propre de $\mathcal{O}$ et est différent de celui de $\mathcal{O}'$, que nous noterons t'. Nous pouvons à présent établir une relation entre ces deux temps propres.

D'après l'Équation 2, pour un petit déplacement $d\boldsymbol{x}$ le long de $\mathcal{O}'$, l'accroissement de t' est

$$dt' = \frac{1}{c}\sqrt{\mathbf{g}(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x})} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt_*^2 - dx_*^2 - dy_*^2 - dz_*^2}.$$

Or d'après l'Équation 7, $d\boldsymbol{x}$ est engendré par un accroissement dt du paramètre t, via :

$$\begin{array}{lcl} c\,dt_* &=& (\frac{ax_0}{c^2} + 1)\cosh(\frac{at}{c})\,c\,dt \\ dx_* &=& (\frac{ax_0}{c^2} + 1)\sinh(\frac{at}{c})\,c\,dt \\ dy_* &=& dz_* = 0. \end{array}$$

En reportant dans l'équation précédente, on trouve que $c\,dt' = c\,dt|\frac{ax_0}{c^2}+1|\sqrt{\cosh(\frac{at}{c})^2 - \sinh(\frac{at}{c})}^2 = |\frac{ax_0}{c^2}+1|\,c\,dt$. Puisque $1+\frac{ax_0}{c^2} > 0$ et que x_0 est constant le long de la ligne d'univers, on peut finalement intégrer [2] cela en :

$$\boxed{t' = (1+\frac{ax_0}{c^2})t}. \tag{8}$$

Pour un observateur accéléré, une horloge idéale fixe par rapport à lui se désynchronise dès que $t \neq 0$. Il s'agit d'une différence majeure avec les observateurs inertiels. On remarque que le facteur de Lorentz, défini par $\gamma = \frac{dt}{dt'}$, a ici une expression inhabituelle. On trouvera en annexe le calcul du facteur de Lorentz dans le cas général.

Décalage spectral : Considérons à présent que $\mathcal{O}'$ émette des signaux à intervalles de temps réguliers $\Delta t'_{em}$ dans son temps propre t', reçus par $\mathcal{O}$ à intervalles Δt_{rec} dans son temps propre t. Le photon est émis à $t'=0$; calculons le temps T auquel il est reçu par $\mathcal{O}$. Cette situation est représentée sur la Figure 2. Notons $M(0)$ l'événement d'émission par $\mathcal{O}'$ et A_2 l'événement de réception par $\mathcal{O}$. Les coordonnées inertielles de A_2 sont, d'après l'Équation 5 : $(ct_*(A_2) = \frac{c^2}{a}\sinh(\frac{aT}{c}), x_*(A_2) = \frac{c^2}{a}(\cosh(\frac{aT}{c})-1)$. On en déduit donc :

$$\overrightarrow{A_2M(0)} = \frac{c^2}{a}\sinh(\frac{aT}{c})\boldsymbol{e}_0^* + (x_0 + \frac{c^2}{a}(1-\cosh(\frac{aT}{c})))\boldsymbol{e}_1^*.$$

Puisque ce vecteur exprime la propagation d'un photon, il est de genre lumière, et doit donc être de norme nulle. On obtient alors $\cosh(\frac{aT}{c}) = \frac{1}{2}(1+\frac{ax_0}{c^2}+\frac{1}{1+\frac{ax_0}{c^2}})$. Finalement, on arrive à

$$T = \frac{c}{a}\ln(1+\frac{ax_0}{c^2}).$$

On remarque que dans la limite $a \to 0$, ce temps T vaut bien $T = \frac{x_0}{c}$, ce qui est conforme au résultat obtenu dans l'espace newtonien.

En résumé, le temps T ne dépend que de la quadri-accélération de $\mathcal{O}$ et de la position x_0, qui sont toutes deux constantes le long de la ligne d'univers. Cet intervalle de temps est donc le même quel que soit le point d'émission. Ainsi se manifeste la propriété de stationnarité de l'observateur $\mathcal{O}$. On remarque qu'en revanche, $T \neq \frac{x_0}{c}$ qui serait le temps mis par le photon pour parcourir la longueur du point de vue d'un observateur inertiel...

Si $\mathcal{O}'$ émet un photon à $t = t_1^{em}$, puis un deuxième à $t = t_2^{em}$, réceptionnés par $\mathcal{O}$ à $t = t_1^{rec}$ et t_2^{rec} respectivement, on a $t_{1,2}^{rec} = t_{1,2}^{em} + T$, et T est le même pour les deux photons. Ainsi, pour l'observateur $\mathcal{O}$, $\Delta t_{rec} = \Delta t_{em}$. Il ne reste plus qu'à utiliser la formule 8 pour écrire

$$\Delta t_{rec} = \frac{\Delta t'_{em}}{1+\frac{ax_0}{c^2}},$$

ce qui en termes de fréquence du signal pour $\mathcal{O}$ et pour $\mathcal{O}'$ devient :

$$\boxed{f_{rec} = f_{em}(1+\frac{ax_0}{c^2})}. \tag{9}$$

2. La constante d'intégration est choisie de sorte que $t' = 0$ lorsque $t=0$: les horloges sont initialement synchronisées.

Admettons maintenant le principe d'equivalence. En vertu de l'égalité entre masse inerte et masse grave, on peut postuler que les mesures physiques effectuées par un observateur inertiel dans un champ de gravitation et par un observateur uniformément accéléré sont identiques (voir [2] pour plus de détails). Considérons deux observateurs inertiels immobiles l'un par rapport à l'autre dans un champ de gravitation uniforme (dans la direction joignant les deux observateurs), l'un émettant des signaux lumineux de période $\Delta t'$ dans son temps propre, reçus par l'autre à une période Δt de son temps propre. D'après le principe d'équivalence, tout se passe comme si ces observateurs étaient uniformément accélérés, et la situation est analogue au problème traité précédemment. La relation entre les temps propres des deux observateurs est :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{1+\frac{ax_{em}}{c^2}},$$

$a = \frac{GM}{R^2} = g$ étant l'accélération nécessaire pour "simuler" le champ gravitationnel. Cette formule correspond à l'effet Einstein dans le cas d'un champ gravitationnel faible ($\frac{R_s}{R} \ll 1$, où $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild du corps considéré). Le fait que $\Delta t \neq \Delta t'$ dans un champ gravitationnel est appelé effet Einstein, ou décalage spectral gravitationnel. Il est en contradiction avec la métrique de Minkowski, qui prévoit $\Delta t = \Delta t'$. Ainsi, c'est le principe d'équivalence qui conduit à abandonner la métrique plate de Minkowski, et à se tourner vers la relativité générale pour traiter le cas de la gravitation. Notons que ce décalage a été vérifié expérimentalement de façon très précise, par l'étude de raies d'émission en spectroscopie ou grâce à l'emploi d'horloges atomiques.

5. Conclusion

En résumé, cet article a pu mettre en lumière le cadre général dans lequel la relativité restreinte peut être appliquée. Le point de vue géométrique employé a permis d'appréhender plus simplement les caractéristiques des observateurs uniformément accélérés. Quelques effets propres à ces observateurs (horizon de Rindler, désynchronisation des horloges) ont été décrits. De plus, on se rend compte que l'impossibilité pour la relativité restreinte de décrire la gravitation repose en grande partie sur le principe d'équivalence.

Annexe : Calcul du facteur de Lorentz dans le cas général

L'expression 8 peut s'obtenir de manière équivalente en effectuant le calcul du facteur de Lorentz de l'observateur $\mathcal{O}'$ par rapport à $\mathcal{O}$. L'expression habituelle n'est valable que dans le cas simple où l'un des observateurs se déplace à vitesse constante par rapport à l'autre. En réalité, le facteur de Lorentz dépend de la quadri-accélération de l'observateur. En gardant les notations employées pour les deux observateurs dans la partie 4, on pose :

$$dt = \gamma\, dt',$$

où dt' est l'intervalle de temps entre les événements $M(t)$ et $M(t+dt)$ le long de $\mathscr{L}'_0$. On note $\boldsymbol{u}$ (resp. $\boldsymbol{u}'$) la quadri-

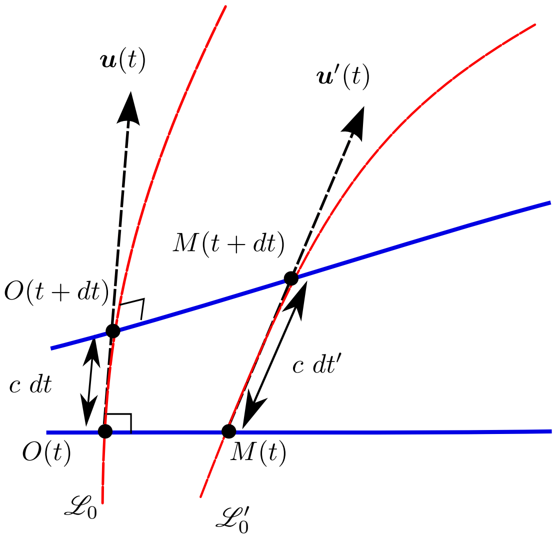

Fig. 3 Lignes d'univers des observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$, de quadri-vitesses respectives $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'$ et décrits par les événements $O(t)$ et $M(t)$. Les plans en bleu représentent les hyperplans contenant l'ensemble des événements simultanés à respectivement $O(t)$ et $O(t+dt)$, aux temps t et $t+dt$.

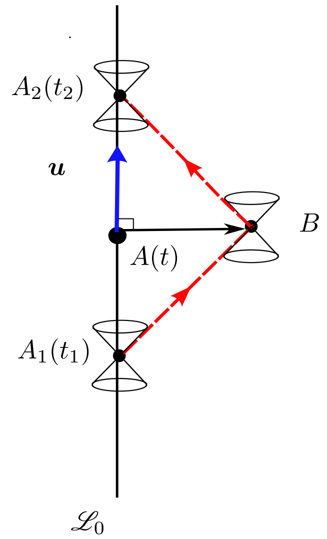

Fig. 4 L'observateur $\mathcal{O}$ envoie un photon en B, qui est réfléchi et lui revient au temps t_2. Sur la figure, l'événement B est simultané à A. Les lignes d'univers des photons (représentées par les cônes de lumière) sont dirigées par des vecteurs lumière, faisant un angle de 45 ° avec la verticale.

vitesse de $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}'$), $\boldsymbol{a}$ la quadri-accélération de $\mathcal{O}$ et $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position de $\mathcal{O}'$ par rapport à $\mathcal{O}$. La situation est représentée sur la Figure 3. La démonstration se base sur un critère de simultanéité qui est illustré par la Figure 4.

Si A est un événement de temps propre t le long de $\mathscr{L}_0$ et B un événement quelconque de $\mathcal{E}$, on dit que B est simultané à A pour $\mathcal{O}$ si :

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2),$$

où t_1 est le temps propre (pour $\mathcal{O}$) entre l'émission par $\mathcal{O}$ d'un photon et sa réception par B, et t_2 le temps propre de réception par $\mathcal{O}$ de ce même photon après sa réflexion par B. On peut en déduire que B est simultané à A pour $\mathcal{O}$ si et seulement si :

$$\boldsymbol{u}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ [3]}.$$

Autrement dit, *les surfaces d'événements simultanés décrites dans la Figure 3 sont localement orthogonales (au sens de la métrique* $\boldsymbol{g}$*) à la ligne d'univers* $\mathscr{L}_0$.

En exploitant ce critère, sachant que $M(t+dt)$ est simultané à $O(t+dt)$ pour $\mathcal{O}$, on a la condition :

$$\boldsymbol{u}(t+dt) \cdot \overrightarrow{O(t+dt)M(t+dt)} = 0.$$

Par définition de la quadri-accélération, on a $\boldsymbol{u}(t+dt) = \boldsymbol{u}(t) + dt\,\boldsymbol{a}(t)$, et par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O(t+dt)M(t+dt)} &= \overrightarrow{O(t+dt)O(t)} + \overrightarrow{O(t)M(t)} \\ &\quad + \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}.\end{aligned}$$

3. Ce résultat est valable dans la limite où B est suffisamment proche de A pour que la courbure de la ligne d'univers A soit négligée.

De même, par définition de la quadri-vitesse, $\overrightarrow{O(t+dt)O(t)} = -dt\boldsymbol{u}(t)$ et $\overrightarrow{M(t)M(t+dt)} = dt'\boldsymbol{u}'(t)$. L'équation précédente se réécrit alors :

$$\begin{aligned}-dt\ \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{u}(t)\cdot\overrightarrow{O(t)M(t)} \\ +dt'\ \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}'(t) - dt^2\ \boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t) \\ +dt\ \boldsymbol{a}(t)\cdot\overrightarrow{O(t)M(t)} + dt\ dt'\ \boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{u}'(t) \\ = 0.\end{aligned}$$

On utilise le fait que $\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t) = c^2$, que $\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t) = 0$ (voir la section 1) et que $\boldsymbol{u}(t)\cdot\overrightarrow{O(t)M(t)} = 0$ puisque $M(t)$ est simultané à $O(t)$ pour $\mathcal{O}$. De plus, on néglige comme précédemment les termes d'ordre deux en dt. Il ne reste plus que :

$$-c^2 dt + dt'\ \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}'(t) + dt\ \boldsymbol{a}(t)\cdot\overrightarrow{O(t)M(t)} = 0,$$

où tous les vecteurs écrits sont à prendre au temps t. On en arrive finalement à l'expression du facteur de Lorentz :

$$\boxed{\gamma = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'}{c^2 - \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{OM}}}.$$

En poursuivant plus en détail le calcul dans le cas étudié précédemment, on pourrait aboutir à l'expression donnée par l'expression 8. De plus, sous réserve que l'observateur $\mathcal{O}$ soit inertiel, on aboutirait à l'expression bien connue $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$.

Remerciements

Je tiens à remercier François Delduc, qui par sa relecture rigoureuse m'a permis d'améliorer et de corriger cet article. Merci également aux rédacteurs et surtout aux organisateurs du JPCE et du séminaire des étudiants, sans qui ce journal n'aurait pu voir le jour.

Références

[1] E. Gourgoulhon. *Relativité Restreinte, Des Particules à l'Astrophysique*. CNRS Editions, 2010.

[2] E. Gourgoulhon. *Notes de cours : Relativité générale*. Consulté en novembre 2015. 2013. URL : http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf.

□ Benjamin Crinquand
M1 Sciences de la Matière
ENS de Lyon - Université Lyon 1
benjamin.crinquand@ens-lyon.fr