

DES COMÈTES AUX MEMBRANES MÉTALLISÉES :
COUPLAGE OPTOMÉCANIQUE

PIERRE PAJUELO, CLARA GARCIA

Cet article propose une introduction au domaine de l'optomécanique en présentant à la fois de manière très générale le domaine mais aussi une application très concrète à un système constitué d'une membrane de Silicium Nitride couplé à une cavité radiofréquence.

1. INTRODUCTION



Les observations astronomiques de Kepler sur les queues de comètes tournées vers l'extérieur du soleil, conséquence mécanique de la pression de radiation, ont permis de comprendre que la lumière transporte une quantité de mouvement le long de sa direction de propagation.² Pourtant, la colinéarité entre la direction dans laquelle la lumière se propage et la force qu'elle exerce sur la matière n'est pas évidente. Le cas d'un photon frappant un miroir parfait en est un exemple. La force optique qui est impliquée dans cette interaction lumière-matière est toujours dirigée perpendiculairement à la surface du miroir.³ Si les photons exercent un effet mécanique sur les surfaces qu'ils rencontrent par transfert de quantité de mouvement (donnant une explication aux observations de Kepler), on peut se demander si réciproquement le mouvement mécanique peut avoir un impact sur un champ électromagnétique. La réponse est : **oui**, une interaction mutuelle entre champ et mouvement mécanique est possible à de faibles échelles d'énergie, et c'est justement ce que le domaine de l'optomécanique propose d'étudier. L'optomécanique permet d'étudier les interactions entre la pression de radiation de la lumière et la matière en utilisant notamment des cavités.^{4,5} Bien que le domaine de l'optomécanique en cavité n'ait réellement pris son essor qu'à partir de l'année 2006, des contributions pionnières sont apparues dès la fin du XX^{ème} siècle. À la fin des années 60 et au cours des années 70, Vladimir Braginsky étudie la mesure de petits signaux, notamment pour détecter les ondes gravitationnelles. Il construit le premier système optomécanique à cavité micro-ondes et montre que le rayonnement micro-ondes peut conduire à un amortissement supplémentaire du mouvement mécanique d'un miroir d'extrémité d'une cavité Fabry-Perot. Dans les années 80, le laboratoire Walther de l'institut Max-Planck d'optique quantique (MPQ) à Munich est le premier à observer les effets de pression

de radiation dus au rayonnement optique, dans un montage avec un miroir macroscopique dont la position présentait une bistabilité sous l'influence de la lumière. Dans les années 90, les expériences optomécaniques principalement menées par le groupe d'Antoine Heidmann au laboratoire Kastler Brossel (LKB) à Paris, et les premières hypothèses sur l'importance des effets quantiques dans de tels systèmes sont faites (groupes de Knight et Tombesi). À partir de 2004, une variété de systèmes à micro- et nano-échelles ont été observés comme présentant des effets optomécaniques (Fig. 1), et le nombre de groupes de recherche a augmenté rapidement depuis lors.

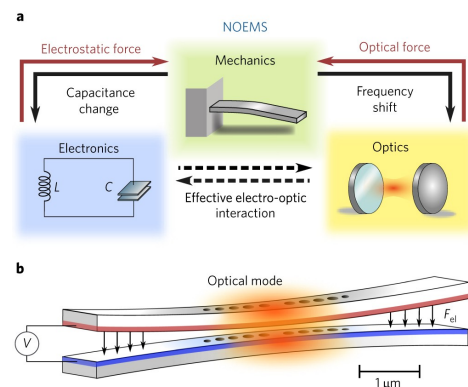


Fig. 1 Physique des systèmes nano-opto-électro-mécaniques (NOEMS). (a) Les NOEMS combinent l'électronique, la mécanique et l'optique. Les effets directs et inverses entre ces trois degrés de liberté sont assurés par des déformations mécaniques. En particulier, les NOEMS permettent d'améliorer les effets électro-optiques grâce à des degrés de liberté mécaniques. (b) Vue d'artiste des NOEMS. Les forces électrostatiques entre deux électrodes et les forces optiques dans des guides d'ondes sub-longueur d'onde couplés couplent les charges, le déplacement mécanique et le champ optique. Tiré de [6].

Pour s'affranchir du bruit thermique, ce qui sera évoqué dans la suite, l'optomécanique par cavités hyperfréquences est principalement effectuée à des températures cryogéniques (autour du mK).⁷⁻⁹ L'objectif de cet article est de présenter un projet réalisé en M1 dans le cadre du module projet expérimental du département de physique

de l'École Normale Supérieure de Lyon. Le projet consiste en une étude optomécanique radiofréquence à température ambiante. Pour cela nous exploitons les propriétés mécaniques d'une membrane en Silicium Nitride¹⁰ que nous couplons à un résonateur cavité radiofréquence LC, en s'inspirant de travaux menés par le groupe de Natalia Ares et présentés dans l'article.¹¹ Le mouvement mécanique de la membrane est généré par un signal radiofréquence. Or, puisque la membrane participe à la capacité du circuit LC, en bougeant, elle va modifier cette capacité, induisant un couplage opto-mécanique. Ce projet vise donc à observer le couplage entre la membrane et le champ électromagnétique à travers la modification de résonance du circuit LC. Après quelques rappels théoriques, nous introduirons le dispositif expérimental, et nous présenterons et commenterons les résultats obtenus.

2. ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Le but de cette partie est d'introduire la théorie du couplage optomécanique et d'étudier séparément chacun des systèmes (optique, électromagnétique & mécanique) puis d'introduire le couplage de manière analytique.⁵

2.1. Théorie de la résonance mécanique

On s'intéresse au cas d'un résonateur mécanique pour lequel on aimerait calculer les modes de vibration et on ne considérera que le cas d'un seul mode normal, autrement dit, un seul mode propre de vibration à la fréquence Ω_m . On peut réaliser cette approche dans le cas d'un non-recouvrement des différents modes de vibration du système mécanique considéré, c'est à dire lorsque les différents modes de résonance sont suffisamment espacés dans le domaine fréquentiel, et on se restreindra à une seule plage de fréquence d'étude.^{12,13} On peut alors introduire l'évolution temporelle de $x(t)$, l'amplitude globale de mouvement, d'un oscillateur harmonique de masse effective m_{eff} :

$$m_{\text{eff}} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + m_{\text{eff}} \Gamma_m \frac{dx(t)}{dt} + m_{\text{eff}} \Omega_m^2 x(t) = F_{\text{ex}}(t) \quad (1)$$

où Γ_m correspond au taux de décroissance lié à la perte d'énergie mécanique du système (supposée indépendante de la fréquence), relié au facteur de qualité mécanique par la relation $Q_m = \Omega_m/\Gamma_m$, et $F_{\text{ex}}(t)$ correspond à la somme des forces agissant sur le système. En l'absence de force extérieure, cette force correspond à celle de Langevin thermique.¹⁴ Si jamais on fait la supposition d'un bruit blanc gaussien pour cette force, on peut montrer que pour un oscillateur de pulsation $\Omega_m = 2\pi \times 400$ kHz (valeur typique pour une membrane) et de masse $m_{\text{eff}} = 80$ ng, qui correspond à la masse du mode fondamental (analogue à un système masse-ressort), à température ambiante, l'ordre de grandeur de l'amplitude moyenne des oscillations est $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_{\text{eff}} \Omega_m^2}} = 3 \times 10^{-12}$ m, qui est 100 fois plus petit qu'un rayon atomique ! Cependant, malgré la très faible amplitude des fluctuations thermiques, celles-ci restent en pratique 3 à 4 ordres de grandeur plus importantes que l'amplitude des fluctuations quantiques que l'on cherche à observer dans les expériences d'optomécanique. Il est alors possible de diminuer les fluctuations thermiques par une méthode de contrôle actif : on mesure la position de l'oscillateur et on applique une force de

contre-réaction du type : $F_{\text{cr}}(t) = -g_1 K x(t) - g_2 m_{\text{eff}} \Gamma \dot{x}(t)$ où g_1 et g_2 sont des constantes sans dimension caractérisant les gains de la chaîne de mesure et de contre-réaction. L'équation différentielle devient alors

$$m_{\text{eff}} \ddot{x} + m_{\text{eff}} (1 + g_2) \Gamma \dot{x} + K (1 + g_1) x = F_{\text{ex}}(t). \quad (2)$$

On peut en déduire qu'en choisissant le gain g_2 positif, on peut associer l'énergie mécanique du résonateur à celui d'un oscillateur à une température T' telle que $E_p = E_c = \frac{1}{2} k_B \frac{T}{1+g_2}$ d'où $T' = \frac{T}{1+g_2}$. Ainsi le facteur $(1 + g_2)$ agit comme un **refroidissement** et est associé à la dissipation.

2.2. Amortissement des oscillations

Expérimentalement, on peut également mesurer Γ par la méthode "Ring-down", qui peut se traduire par "tintement de cloche" : le son s'atténue lentement après une excitation brève.¹⁵ La mesure du facteur de qualité par ring-down consiste à appliquer sur la membrane une excitation mécanique grâce, par exemple, à un élément piézo-électrique placé en contact avec la membrane. L'excitation produit une vibration monochromatique d'amplitude beaucoup plus importante que le mouvement thermique. L'excitation est alors brusquement stoppée et on mesure de manière optique les déplacements de la membrane. Les quadratures X_1 et X_2 , sont définies comme les composantes de la position sur les fonctions sinus et cosinus oscillant à une pulsation de référence Ω_{ref} , $x(t) = X_1(t) \cos(\Omega_{\text{ref}} t) + X_2(t) \sin(\Omega_{\text{ref}} t)$, et sont extraites par démodulation. On peut alors définir une amplitude complexe $\mathcal{A}(t)$ comme : $\mathcal{A}(t) = X_1(t) + iX_2(t)$ (Fig. 2).

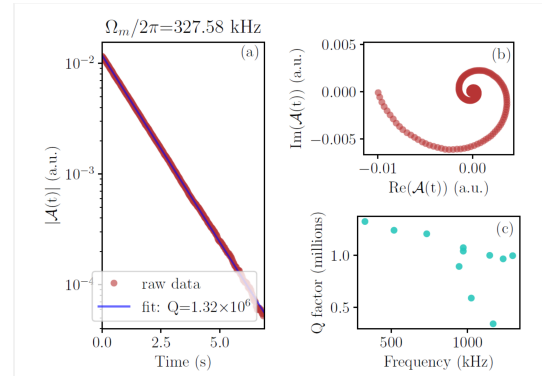


Fig. 2 Détermination du taux de décroissance par méthode "Ring-down" pour une membrane carrée de 100 nm d'épaisseur. (a) Évolution du module de $\mathcal{A}$; (b) Trajectoire de $\mathcal{A}$ dans le plan complexe; (c) Facteurs de qualité $Q_m = \Omega_m/\Gamma_m$ des premiers modes mécaniques de la membrane en fonction de leurs fréquences. Tiré de [16].

Ainsi on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = |x_0| [\cos^2(\Omega_m - \Omega_{\text{ref}}) t \\ &\quad + \sin^2(\Omega_m - \Omega_{\text{ref}}) t] \exp(-\Gamma t/2) \\ &= |x_0| \exp(-\Gamma t/2). \end{aligned} \quad (3)$$

On attend donc une décroissance exponentielle. C'est ce que l'on observe sur le graphe (a). Dans l'espace complexe on obtient une spirale décroissante exponentiellement et tournant à la pulsation $\Omega_m - \Omega_{\text{ref}}$. Grâce à cette méthode, on remonte ainsi au paramètre Γ .

2.3. Calcul des modes

Pour calculer les modes de la membrane, on peut réaliser la modélisation donnée dans la figure 3, en introduisant ρ la masse volumique de la membrane et σ une constante qui dépend de la tension et des dimensions de la membrane.

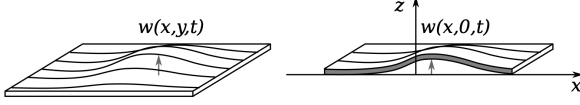


Fig. 3 Modélisation de la membrane, en repérant par x la coordonnée spatiale de la déformation w étudiée à l'instant t . On considère une membrane fine, carrée de côté a et d'épaisseur h très petite devant a .

On peut alors calculer l'énergie cinétique de la membrane par :

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (4)$$

dont les solutions sont de la forme

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}(t) \xi_{nm}(x, y) \quad (5)$$

avec

$$\xi_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right) \quad (6)$$

et les fonctions q_{nm} satisfont l'équation d'Euler-Lagrange suivante : $2A_0 \ddot{q}_{mn} = -2B_0(n^2 + m^2)q_{nm}$ où $B_0 = \frac{\sigma h \pi^2}{8}$ et $A_0 = \frac{\rho h a^2}{8}$. On a alors une infinité de variables qui chacune vérifie une équation d'oscillateur harmonique, chaque q_{nm} correspondant à un mode de fréquence $f_{nm} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{B_0}{A_0}(n^2 + m^2)} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\sigma(n^2 + m^2)}{\rho}}$. On peut alors réaliser une simulation utilisant une méthode par éléments finis pour calculer les différents modes et les différentes fréquences associées (Fig. 4). À noter que les modes ($n = 2, m = 1$) sont dégénérés, les solutions étant des superpositions des 2 modes. De même, les modes de la ligne ($n = 2, m = 1$) pris séparément ne semblent pas respecter les symétries de la membrane : en effet, c'est l'ensemble des solutions qui en respecte les symétries.

2.4. Traitement quantique de la résonance

Nous passons maintenant à un formalisme quantique pour l'écriture d'un hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$, bien que notre expérience ici soit classique, étant donné que ce genre de systèmes peut être mis dans le régime quantique à basse température.^{7-9,17,18} L'hamiltonien s'écrit alors, toujours en ne considérant qu'un seul mode mécanique :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar \Omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \hbar \Omega_m, \quad (7)$$

tel que l'opérateur de création de phonon - particule fictive correspondant en mécanique quantique à l'excitation d'un mode de vibration dans un cristal, ou d'une onde de compression dans un liquide - ($\hat{b}^\dagger$) et d'annihilation de phonon ($\hat{b}$) soient introduits par les relations :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x_{\text{ZPF}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \\ \hat{p} &= -im_{\text{eff}} \Omega_m x_{\text{ZPF}} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger), \end{aligned} \quad (8)$$

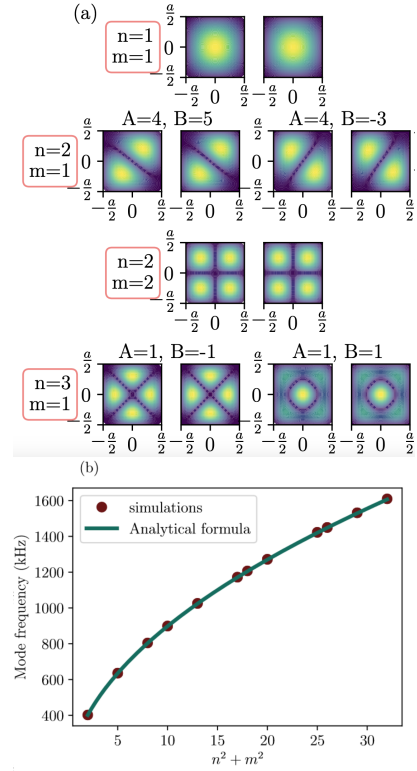


Fig. 4 (a) Formes de mode pour les 6 premiers modes d'une membrane carrée. L'amplitude d'oscillation est représentée en nuances de jaune à violet. Pour chaque mode, la forme simulée est à gauche, tandis que la forme donnée par la formule analytique est à droite ; (b) Fréquences des 20 premiers modes d'une membrane carrée de largeur $a = 1$ mm, d'épaisseur $h = 100$ nm et de contrainte interne $\sigma = 1$ GPa. Les fréquences simulées sont présentées sous forme de points, tandis que la ligne droite correspond à la formule associée à f_{nm} .¹⁶

avec

$$x_{\text{ZPF}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\text{eff}} \Omega_m}} \quad (9)$$

associé à l'amplitude de fluctuation du point zéro de l'oscillateur, *ie.* de l'étalement de l'état fondamental donné par $x_{\text{ZPF}}^2 = \langle 0 | \hat{x}^2 | 0 \rangle$. La quantité $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ correspond à l'opérateur nombre de phonons, de moyenne noté $\bar{n} = \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle$.

2.5. Formalisme de la théorie entrée-sortie

Dans la suite, nous allons développer quelques éléments de théorie sur l'évolution du champ électrique dans la cavité et le lien avec le hamiltonien de couplage dans celle-ci.⁵ La théorie entrée-sortie est formulée au niveau des équations du mouvement dans la représentation d'Heisenberg, décrivant l'évolution temporelle de l'amplitude du champ $\hat{a}$ à l'intérieur de la cavité. Dans le cas classique, $\hat{a}$ serait remplacé par une amplitude complexe correctement normalisée du champ électrique du mode de cavité considéré. En effet, la version classique de l'équation (10) peut être obtenue en prenant simplement la moyenne, auquel cas on remplace $\hat{a}$ par $\langle \hat{a} \rangle$.

On s'intéresse aux différents facteurs pouvant agir sur le champ $\hat{a}$. Une première description de la dynamique de ce champ intervient dans l'observation d'un taux de décroissance d'un facteur $\kappa/2$ de l'amplitude $\hat{a}$, où κ est le taux de décroissance globale. Il faut prendre également en compte que les fluctuations du champ sont constamment renouvelées par le bruit quantique ou thermique entrant

par les différents ports de la cavité. Dans le cas présent, nous distinguons les canaux associés au couplage d'entrée (taux de décroissance en énergie κ_{ex}) et les autres processus de perte (taux de décroissance en énergie restant κ_0 , comme la perte par le second miroir pour une cavité Fabry-Perot). L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{\kappa}{2} \hat{a} + i \Delta \hat{a} + \sqrt{\kappa_{\text{ex}}} \hat{a}_{\text{in}} + \sqrt{\kappa_0} \hat{f}_{\text{in}}, \quad (10)$$

où le champ en entrée est noté $\hat{a}_{\text{in}}$ (la puissance d'entrée est $\hbar\omega\langle\hat{a}_{\text{in}}^\dagger\hat{a}_{\text{in}}\rangle$) et les autres entrées -non souhaitées, comme les rayonnements parasites- sont modélisées par le terme $\hat{f}_{\text{in}}$. Dans cette expression, on a choisi un référentiel tournant à la fréquence du laser ω_L , c'est-à-dire $\hat{a}^{\text{orig.}} = e^{-i\omega_L t} \hat{a}^{\text{ici}}$, et avons introduit le désaccord du laser $\Delta = \omega_L - \omega_{\text{cav}}$ par rapport au mode de la cavité.

2.6. Hamiltonien de couplage

On peut également donner finalement l'expression du hamiltonien final de notre système, décrivant l'interaction entre un mode de radiation avec un mode de vibration. Nous ne considérerons l'interaction que d'un seul mode optique (proche de celle associée au laser), avec un seul mode mécanique. Nous pouvons alors décomposer le problème sous la forme :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}, \quad (11)$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega_{\text{cav}} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\Omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b}, \quad (12)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -\hbar g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (13)$$

où $g_0 = |\frac{\partial\omega_{\text{cav}}}{\partial x}| x_{\text{ZPF}}$ est le facteur de couplage optomécanique. Ce facteur de couplage est obtenu en réalisant un développement limité de la pulsation de résonance de la cavité. Dans le cas d'un couplage paramétrique, *ie.* lorsque la fréquence de résonance de la cavité est modulée par l'amplitude mécanique, on peut développer :

$$\omega_{\text{cav}}(x) \approx \omega_{\text{cav}} + x \frac{\partial\omega_{\text{cav}}}{\partial x} + \dots, \quad (14)$$

et on introduit G tel que :

$$G = -\frac{\partial\omega}{\partial x} \stackrel{\text{Simple cav.}}{=} -\frac{\omega_{\text{cav}}}{L}, \quad (15)$$

correspondant au décalage de fréquence optique. Cela permet ainsi d'obtenir une estimation du facteur de couplage à vide $g_0 = G x_{\text{ZPF}}$.

Dans le cas où on sonde le système avec un laser de pulsation ω_L , on peut se placer dans le cas d'un référentiel tournant, en appliquant astucieusement l'opérateur unitaire de transformation $\hat{U} = \exp(i\omega_L \hat{a}^\dagger \hat{a} t)$ tel que l'hamiltonien final puisse se développer sous la forme :

$$\hat{\mathcal{H}} = -\hbar\Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\Omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + \dots \quad (16)$$

avec $\Delta = \omega_L - \omega_{\text{cav}}$. On étudiera plus en détail la mesure et l'importance du facteur de couplage optomécanique dans la suite.

2.7. Théorie sur le transport d'information

Il est fondamental de comprendre comment le signal est transporté, transmis dans notre système puis réfléchi vers l'appareil de mesure. Pour comprendre ces étapes nous allons nous baser sur le cas du circuit LC. Un quantum d'excitation injecté dans un résonateur LC, sans perte interne, a un temps de vie de $\frac{1}{\kappa_{\text{ex}}}$ en un temps dt . Cependant, en pratique, les pertes internes doivent être prises en compte. On les modélise alors par une résistance. Ces pertes vont avoir un autre taux de dissipation κ_{loss} . Le système peut ainsi être représenté par le schéma présenté en figure 5.

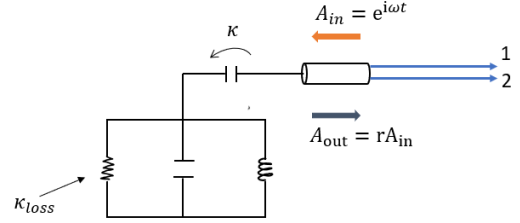


Fig. 5 Schéma d'un système LC. Le signal en entrée A_{in} est fourni par un générateur et nous nous intéressons au signal réfléchi noté A_{out} . Nous prenons en compte les pertes par le terme κ_{loss} .

Le coefficient de réflexion s'exprime alors comme :

$$r = \frac{\kappa_{\text{ex}} - \kappa_{\text{loss}} - i(\omega - \omega_{\text{res.}})}{\kappa_{\text{ex}} + \kappa_{\text{loss}} + i(\omega - \omega_{\text{res.}})}, \quad (17)$$

avec ω la pulsation du signal incident et $\omega_{\text{res.}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pour un résonateur LC.

La représentation en partie Imaginaire (Im)/partie Réelle (Re) du signal permet d'extraire des informations sur les pertes internes du système d'intérêt (Fig. 6).

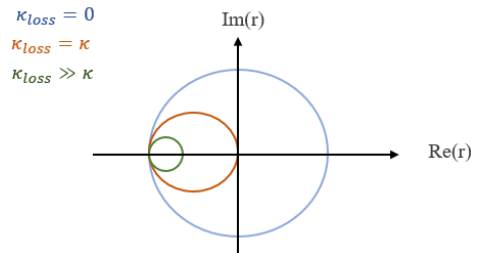


Fig. 6 Représentation complexe du coefficient de réflexion r en fonction de la fréquence ω pour trois valeurs caractéristiques de κ_{loss} .

Il reste néanmoins nécessaire de prendre en compte les réflexions parasites. En effet, si un cercle parfait est décalé du centre, ce décalage sera interprété comme une ou des pertes internes et des réflexions parasites.

De manière pratique, nous allons utiliser au cours de notre étude expérimentale un analyseur de réseau vectoriel (Vector Network Analyzer, VNA), qui nous permettra d'accéder à la mesure du coefficient de réflexion de notre résonateur.

Pour se prémunir des réflexions parasites, le VNA est calibré sur trois impédances connues : 50Ω , 0Ω et une ouverte. De cette manière, le VNA corrigera automatiquement la position des cercles en prenant en compte les pertes dans le circuit de mesure hors de l'échantillon.

3. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Dans cette partie, nous allons présenter le dispositif expérimental et les techniques utilisées pour fabriquer les différentes pièces du dispositif.

Le dispositif expérimental mis en place (Fig. 7) peut se décomposer en trois parties :

- Le résonateur nanomécanique constitué de la membrane de Silicium Nitride ;
- Le circuit radiofréquence monté sur un PC Board ;
- Les instruments d'injection d'excitation radiofréquence et de prise de mesure.

L'ensemble est placé à température ambiante et sous vide : le montage implique donc également l'utilisation d'une pompe turbomoléculaire permettant d'atteindre des pressions de 10^{-5} bar.

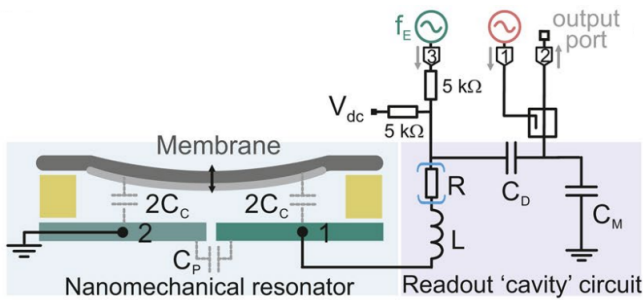


Fig. 7 Dispositif expérimental. Une fine membrane métallisée en nitrure de silicium est suspendue au-dessus de deux électrodes, dont l'électrode 1 est connectée à un circuit radiofréquence formant un résonateur LC avec C formée par les électrodes et la membrane, $L = 223$ nH avec une inductance en composant monté en surface (CMS) ainsi que des condensateurs fixes C_D et $C_M = 10$ pF. Les pertes sont prises en compte par la résistance effective R. Un signal radiofréquence est injecté au **port 1**, réfléchi par le circuit et reçu au **port 2** pour permettre la détection. Le mouvement de la membrane est excité via le **port 3**. Tiré de [11].

3.1. Résonateur nanomécanique

Le résonateur nanomécanique est composé de la membrane en Silicium Nitride (de surface : 1.5×1.5 mm et d'épaisseur 50 nm). Il s'agit d'un matériau particulièrement pertinent pour cette étude puisqu'il présente un grand facteur de qualité mécanique, la membrane peut donc être sensible aux fréquences radio malgré la température ambiante.¹⁰ Pour que la membrane participe à la capacité du circuit, on recouvre 90% de sa surface avec une couche d'aluminium. Cette métallisation de la membrane a été effectuée grâce à un évaporateur à canon électronique.¹⁹ La membrane est alors suspendue au-dessus de deux électrodes (de surface 7×4 mm et d'épaisseur 100 nm) en aluminium séparées entre elles de $\delta = 300$ μ m. Les électrodes ont été fabriquées grâce à un procédé dit de "lift-off" après lithographie optique (Fig. 8).

Une des électrodes est reliée à la masse et l'autre à une inductance discrète.

Le circuit équivalent correspond donc à deux capacités en parallèles : la capacité formée entre les deux électrodes C_P qui est négligeable devant la capacité formée entre les électrodes et la membrane C_C . Le couplage entre électrode et membrane dépend de la distance de séparation d , et donc bien du déplacement x de la membrane.

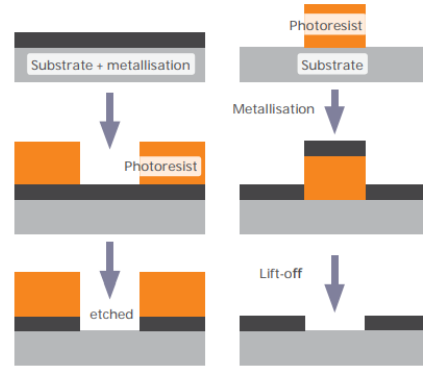


Fig. 8 Méthode Lift Off : Une couche de résine est déposée sur une puce puis découpée par lithographie optique pour ne recouvrir que les surfaces que l'on ne souhaite pas métalliser. Retirer cette résine après métallisation permet alors d'obtenir une métallisation partielle de la surface selon la géométrie désirée. Tiré de [20].

3.2. Cavity radiofréquence

L'ensemble membrane-électrode forme la capacité du circuit LC. Pour obtenir une cavité résonnante, il faut lier cette partie résonateur mécanique à un circuit radiofréquence. Sur un PC Board (PCB), nous collons une puce de saphir sur laquelle se trouve les électrodes en aluminium, nous disposons la membrane au-dessus des électrodes, et nous relierons le tout à des composants montés en surface (CMS) (Fig. 7). Ces composants sont constitués d'une inductance $L = 223$ nH mais aussi de deux condensateurs $C_D = 10$ pF et $C_M = 10$ pF qui permettent respectivement de contrôler le couplage à la cavité, c'est-à-dire le nombre de photons entrant dans le résonateur mécanique et d'améliorer la correspondance d'impédance entre les lignes. Ces capacités, étant beaucoup plus grande que $C_T = C_P + C_C$, n'affectent pas la fréquence de résonance de la cavité. L'injection d'un signal radio fréquence à l'entrée (**Port 1**) permet d'induire une excitation dans le circuit LC. La fréquence de résonance du système est alors donnée par la relation : $f_{res.} = 1/\sqrt{LC_T}$. Le **port 3** permet ensuite d'injecter un signal AC afin d'exciter le mouvement de la membrane. Le montage final est présenté en figure 9.

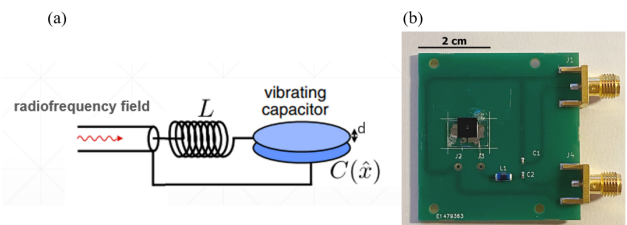


Fig. 9 (a) Schéma électrique équivalent à la cavité radiofréquence optomécanique. Un champ radiofréquence est injecté dans un circuit LC. (b) Cavité utilisée expérimentalement. Une puce de saphir sur laquelle se trouve les électrodes et la membrane suspendue est placée sur un PC Board constituée des composants montés en surfaces L, C_D et C_M . Deux ports de sortie J1 et J4 permettent respectivement d'injecter le signal radiofréquence et d'exciter le mouvement de la membrane.

TABLE II. Experimental parameters for a representative sampling of published cavity-optomechanics experiments.

Reference	$\Omega_m/2\pi$ (Hz)	m (kg)	$\Gamma_m/2\pi$ (Hz)	Qf (Hz)	$\kappa/2\pi$ (Hz)	κ/Ω_m	$g_0/2\pi$ (Hz)
Murch <i>et al.</i> (2008)	4.2×10^4	1×10^{-22}	1×10^3	1.7×10^6	6.6×10^5	15.7	6×10^5
Chan <i>et al.</i> (2011)	3.9×10^9	3.1×10^{-16}	3.9×10^4	3.9×10^{14}	5×10^8	0.13	9×10^5
Teufel, Donner <i>et al.</i> (2011)	1.1×10^7	4.8×10^{-14}	32	3.5×10^{12}	2×10^5	0.02	2×10^2
Verhagen <i>et al.</i> (2012)	7.8×10^7	1.9×10^{-12}	3.4×10^3	1.8×10^{12}	7.1×10^6	0.09	3.4×10^3
Thompson <i>et al.</i> (2008)	1.3×10^5	4×10^{-11}	0.12	1.5×10^{11}	5×10^5	3.7	5×10^1
Kleckner <i>et al.</i> (2011)	9.7×10^3	1.1×10^{-10}	1.3×10^{-2}	9×10^9	4.7×10^5	55	2.2×10^1
Gröblacher, Hammerer <i>et al.</i> (2009)	9.5×10^5	1.4×10^{-10}	1.4×10^2	6.3×10^9	2×10^5	0.22	3.9
Arcizet <i>et al.</i> (2006a)	8.14×10^5	1.9×10^{-7}	81	8.1×10^9	1×10^6	1.3	1.2
Cuthbertson <i>et al.</i> (1996)	10^3	1.85	2.5×10^{-6}	4.1×10^{10}	275	0.9	1.2×10^{-3}

Fig. 10 Applications numériques des paramètres pertinents dans différents systèmes optomécaniques. Tiré de [5].

3.3. Excitation RF et Readout

Afin d'injecter le signal radio-fréquence dans la cavité et d'obtenir les informations sur la cavité, dont notamment la fréquence de résonance, nous utilisons un analyseur de réseau vectoriel. Cet analyseur de réseau a deux ports : un qui permet d'envoyer un signal vers le circuit LC via un coupleur directionnel et un deuxième qui permet d'acquérir le signal réfléchi par le circuit et le comparer au signal envoyé. Une fois la fréquence de la cavité LC déterminée, la membrane est excitée à l'aide d'une autre fréquence f_{meca} injectée par un générateur basse fréquence au port 3. Cette fréquence d'excitation mécanique est injectée conjointement à une tension DC. Une telle tension permet de mettre la membrane en tension mécanique en provoquant une force électrostatique dans la membrane. Pour ajouter ce signal continu nous utilisons un diviseur de puissance (Power Divider) que nous avons fait construire par l'équipe technique du laboratoire.

Si la membrane se met à bouger, il y a modification de la capacité de la cavité. Aux résonances on s'attend alors à voir des bandes secondaires (Sidebands), issues du mouvement mécanique de la membrane, apparaître dans le spectre de puissance du signal. Ces bandes secondaires sont observées à l'aide d'un analyseur de spectre (Spectrum Analyzer). Il est alors possible de déterminer la nouvelle valeur de la capacité induite par cette interaction et ainsi de remonter à la mesure du déplacement de la membrane.

4. MESURES

Une fois le montage expérimental réalisé, la première mesure consiste à déterminer la fréquence de résonance du système LC à vide, c'est-à-dire en l'absence de membrane. Un creux d'absorption dans le paramètre de réflexion (Scattering Parameter) S_{11} indique la valeur de cette fréquence, et en mesurant la largeur du creux, on peut remonter au facteur de qualité du système défini comme $Q = \omega_0/\Delta\omega$. Dans notre cas,¹¹ le système possède une fréquence fondamentale de vibration mécanique à $f_0 = 78.6$ kHz et une masse effective de la membrane $m \sim 4.5 \cdot 10^{-10}$ kg.

4.1. Facteur de couplage optomécanique

Le facteur de qualité du système donné par le groupe de N. Ares [11] est :

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{sys}}}{E_{\text{dis}}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (18)$$

avec E_{sys} l'énergie maximale contenue dans le système, E_{dis} l'énergie dissipée par le système sur une période, ω_0

la pulsation propre et $\Delta\omega$ la bande passante de résonance. Dans notre système $Q = 7.4$, c'est-à-dire un facteur de qualité relativement faible. On remarque que malgré un faible facteur de qualité, différentes propriétés du système peuvent être étudiées, en particulier les modes mécaniques et les forces de couplage optomécanique. D'un point de vue fondamental, il peut être intéressant d'approfondir l'origine du couplage. L'effet de la capacité et la membrane métallique C_C conduit à un déplacement u et donc à un couplage entre la cavité et le mouvement mécanique, couplage donné par :

$$\frac{df_c}{du} \sim 1/(4\pi\sqrt{LC_T^3}) \frac{\partial C_C}{\partial u}, \quad (19)$$

où f_c est la fréquence de résonance de la cavité, C_T la capacité du circuit total et u le déplacement de la membrane par rapport à sa position d'équilibre.

La force entre un photon unique et un phonon unique (single-photon coupling strength) est alors :

$$\frac{g_0}{2\pi} \sim \frac{1}{a\pi\sqrt{LC_T^3}} \frac{\partial C_C}{\partial u} u_{ZP} \quad (20)$$

avec $u_{ZP} = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi m f_{i,j}}}$ et $f_{i,j} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} \sqrt{i^2 + j^2}$ les harmoniques mécaniques. On peut alors développer le terme en dérivée partielle :

$$\frac{\partial C_C}{\partial u} \propto \sqrt[4]{\frac{P_{\text{side}}}{\tilde{P}_C} \left(\frac{\kappa}{\kappa_{\text{ex}}} \right)^2 \frac{((\frac{\kappa}{2})^2 + (2\pi f_{i,j})^2) (2LC_T^3)}{V_{\text{DC}}^2}}, \quad (21)$$

avec $\tilde{P}_C$ la puissance d'entraînement de la cavité en tenant compte de l'affaiblissement d'insertion global, P_{side} la puissance maximale observée sur la bande latérale et C_T la capacité totale du système. On peut donner quelques valeurs pour les paramètres introduits dans la figure 10.

À partir de la mesure de la fréquence de résonance, nous pouvons en déduire la valeur de la capacité formée des deux électrodes et pouvoir la comparer à la capacité induite par la présence de la membrane. Nous pourrions également remonter à la distance entre la membrane et les électrodes.

Placer la membrane de Silicium Nitride au-dessus des électrodes est une des étapes les plus délicates de notre protocole expérimental. Ces membranes sont connues pour leur extrême fragilité ; le moindre choc peut les déchirer ou les briser. Pour prévenir le déchirement, l'équipe de N. Ares propose une méthode de fixation qui consiste à disposer

un point de colle en bord de puce et d'y glisser la membrane pour une fixation d'une hauteur finale de quelques μm . La cavité, composée des électrodes, de la membrane et des éléments montés en surface est alors placée dans une chambre à vide, pompée jusqu'à atteindre une pression $P < 10^{-3}$ bar. La fréquence de résonance de la cavité est de nouveau mesurée, indiquant un décalage moyen de -50 MHz par rapport sa valeur à vide. Le facteur de qualité est largement réduit. Enfin, le montage expérimental est modifié afin d'injecter un second ton d'excitation mécanique de la membrane, et d'analyser le signal dans la cavité à l'aide d'un analyseur de spectre. La fréquence d'excitation a pour but d'induire un mouvement de la membrane qui se traduit par l'apparition des bandes latérales de part à l'autre de la fréquence de résonance centrale f_{LC} dans la mesure de spectre.

Au cours des expériences menées, de nombreux obstacles ont été rencontrés, empêchant la détection de bandes latérales dans la mesure du spectre. Parmi ces obstacles, on peut citer le déchirement des membranes, survenant lors de la pose sur les électrodes ou de la mise sous vide trop rapide. Même en l'absence de déchirement, la membrane pouvait être maintenue trop loin des électrodes par le point de colle ou bien changer de position, ne se trouvant alors plus en face des électrodes. On pourra citer également la difficulté d'atteindre un espacement faisant intervenir une interaction attractive de nature électrostatique. En outre, le signal d'excitation mécanique initial était trop faible, justifiant l'ajout de la tension V_{DC} .

5. RÉSULTATS

5.1. Apparition des bandes latérales

Au cours de la dernière mesure de la dernière séance, nous avons finalement pu observer la présence de bandes latérales, témoignant de l'apparition d'un couplage opto-mécanique dans le système étudié. La fréquence de résonance du circuit avec membrane correspondait à 264 MHz et celle sans membrane correspondait à 308 MHz (Fig. 11). À partir de la seconde mesure on peut en déduire $C_P = 1.20$ pF (on néglige les autres condensateurs) et en utilisant ensuite la première mesure on déduit $C_C = 0.430$ pF. En utilisant le fait que $C_C \sim \frac{\epsilon_0 a}{d}$, avec a la surface métallisée de la membrane et ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide, on peut enfin conclure que la séparation membrane-electrode est $d \sim 46.3 \mu\text{m}$. En comparaison, le groupe de N. Ares¹¹ donne $C_C = 1.64$ pF et $d \sim 9 \mu\text{m}$. Nous avons ensuite obtenu pour une excitation mécanique de 30 kHz des bandes latérales à la fréquence d'excitation $f_{mec.} \sim 60$ kHz (Fig. 12).

Malheureusement, bien que nous ayons réussi à détecter ce signal, il n'a pas pu être enregistré car il a disparu avant que nous ayons pu enregistrer la mesure de manière numérique.

6. DISCUSSIONS

Nous pouvons déjà faire remarquer que le traitement des données n'a pas été totalement abouti. En effet, il aurait fallu prendre en compte les facteurs de perte évoqués dans la partie théorie et les implémenter dans un algorithme de traitement de données,²¹ mais une calibration du VNA a néanmoins permis de faire apparaître les résonances souhaitées. Pour ce qui concerne le facteur de

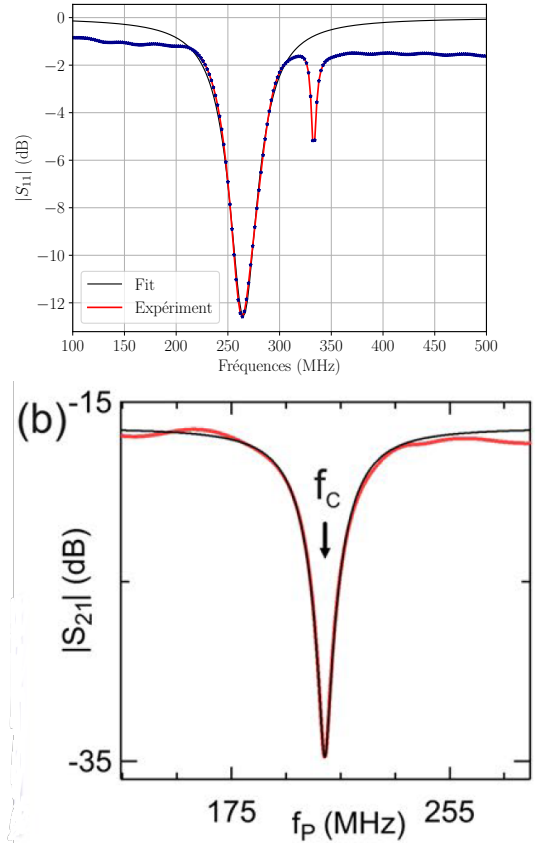


Fig. 11 (a) Graphe obtenu sur le VNA ZNL14 de la marque Rohde & Schwarz pour la mesure du coefficient de réflexion $|S_{11}|$ en fonction de la fréquence, pour notre système avec membrane, sous vide. Les points (et la courbe rouge) correspondent aux données mesurées. La courbe noire correspond au modèle donné pour le coefficient de réflexion r de l'équation 17. Les paramètres ajustés sont $\omega_{res} = 264.99 \pm 0.18$ MHz, $Q = 5.862$ (donné directement par le VNA), $\kappa_{ex} = 5.41 \pm 0.06$ et $\kappa_{loss} = 17.78 \pm 0.27$ obtenus par la fonction `curve_fit` du module Python `Scipy`. (b) Réflexion en fonction de la fréquence dans [11]. La courbe noire est un ajustement à un modèle de circuit.

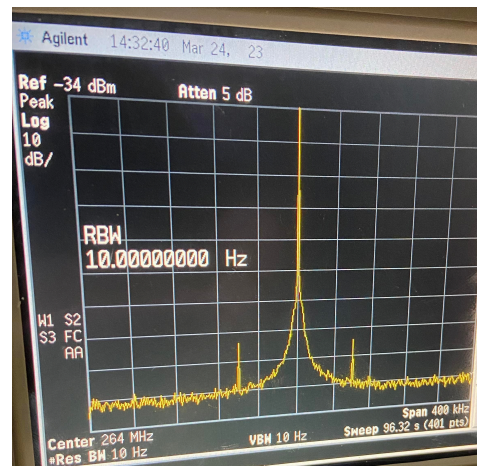


Fig. 12 Photographie des données obtenues à l'aide du Spectrum Analyzer E4405B de la marque Agilent pour une fréquence d'excitation mécanique de 30 kHz avec une fréquence de résonance à vide de 264 MHz.

qualité, qui nous permet d'estimer l'intensité du couplage entre la membrane et les électrodes, nous n'avons pas retrouvé les valeurs des simulations réalisées durant le projet, qui ne prennent pas en compte les pertes inévitables du milieu. Néanmoins nous remarquons que nous avons trouvé des valeurs de facteur de qualité assez proches de celles de l'article original [11]. Pour ce qui est de l'apparition des bandes latérales, nous constatons que la puissance relative des pics latéraux est significative de l'espace en fréquence entre $f_{\text{mec.}}$ et $f_{\text{in.}}$, la fréquence injectée. La suite logique de la manipulation aurait été de "cartographier" l'espace des phases pour caractériser le facteur de couplage visible à partir de l'intensité des bandes latérales.¹¹ Le facteur de couplage optomécanique est estimé à $\frac{g_{0,\text{exp.}}}{2\pi} \sim 345.5 \text{ Hz}$, sur la base des hypothèses et approximations précisées plus haut.

7. CONCLUSION

Ce projet expérimental a permis l'étude du couplage optomécanique d'une membrane de Silicium Nitride à une cavité radiofréquence composée d'un circuit LC. Pour ce faire, nous avons mis en place un dispositif expérimental inspiré d'une publication récente [11], et nécessitant la fabrication de plusieurs éléments (fabrication des électrodes, métallisation des membranes, conception du PC Board) ainsi que la combinaison de deux sources basses fréquences et d'une tension continue. Nous avons également observé le couplage optomécanique du système se traduisant par l'apparition de bandes latérales dans le spectre de puissance du signal.

D'un point de vue général, ce projet et cet article ont permis de présenter le domaine de l'opto-mécanique en cavité, à la fois d'un point de vue théorique et d'un point de vue expérimental.

REMERCIEMENTS

Nous souhaitons remercier Benjamin HUARD pour son accompagnement très chaleureux, sa générosité et pour toutes les connaissances transmises au cours de cette année. Nous souhaitons également remercier toute l'équipe de Quantum Circuits, avec une mention particulière pour Adria, Hector et Mattéo pour leur accompagnement précieux, souvent dans les moments les plus délicats. Enfin, un grand merci à Jacques MAROT pour son investissement et son aide tout au long du développement de ce projet expérimental.

RÉFÉRENCES

- (1) LILLER, W. Comet 1P/Halley, 1986, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lspn_comet_halley.jpg.
- (2) BRANDT, J. C. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **1968**, 6 (1), 267-286.
- (3) BRASSELET, E. *Nature Physics* **2016**, 12 (8), 725-725.
- (4) BAGCI, T.; SIMONSEN, A.; SCHMID, S.; VILLANUEVA, L. G.; ZEUTHEN, E.; APPEL, J.; TAYLOR, J. M.; SØRENSEN, A.; USAMI, K.; SCHLIESSER, A.; POLZIK, E. S. *Nature* **2014**, 507.
- (5) ASPELMEYER, M.; KIPPENBERG, T. J.; MARQUARDT, F. *Reviews of Modern Physics* **2014**, 86 (4), Publisher : American Physical Society, 1391-1452.
- (6) MIDOLO, L.; SCHLIESSER, A.; FIORE, A. *Nature Nanotechnology* **2018**, 13 (1), 11-18.
- (7) NOGUCHI, A.; YAMAZAKI, R.; ATAKA, M.; FUJITA, H.; TABUCHI, Y.; ISHIKAWA, T.; USAMI, K.; NAKAMURA, Y. *New Journal of Physics* **2016**, 18 (10), 103036.
- (8) FINK, J. M.; KALAEI, M.; PITANTI, A.; NORTE, R.; HEINZLE, L.; DAVANÇO, M.; SRINIVASAN, K.; PAINTER, O. *Nature Communications* **2016**, 7 (1), 12396.
- (9) PETERSON, R. W.; PURDY, T. P.; KAMPEL, N. S.; ANDREWS, R. W.; YU, P.-L.; LEHNERT, K. W.; REGAL, C. A. *Physical Review Letters* **2016**, 116 (6), 063601.
- (10) ZWICKL, B. M.; SHANKS, W. E.; JAYICH, A. M.; YANG, C.; BLESZYNSKI JAYICH, A. C.; THOMPSON, J. D.; HARRIS, J. G. E. *Applied Physics Letters* **2008**, 92 (10), 103125.
- (11) PEARSON, A. N.; KHOSLA, K. E.; MERGENTHALER, M.; BRIGGS, G. a. D.; LAIRD, E. A.; ARES, N. *Scientific Reports* **2020**, 10 (1).
- (12) DOLLEMAN, R. J.; HOURI, S.; CHANDRASHEKAR, A.; ALIJANI, F.; van der ZANT, H. S. J.; STEENEKEN, P. G. *Scientific Reports* **2018**, 8 (1), 9366.
- (13) NIELSEN, W. H. P.; TSATURYAN, Y.; MØLLER, C. B.; POLZIK, E. S.; SCHLIESSER, A. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **2017**, 114 (1), 62-66.
- (14) POMEAU, Y.; PIASECKI, J. *Comptes Rendus Physique* **2017**, 18 (9), 570-582.
- (15) KARASSOULOFF, T. Corrélations optomécaniques : étude du bruit quantique de pression de radiation, thèse de doct., 2016, p. 59-61, <http://www.theses.fr/2016PA066185/document>.
- (16) CAPELLE, T. Electromechanical cooling and parametric amplification of an ultrahigh-Q mechanical oscillator, Theses, Sorbonne Université, 2020, <https://hal.science/tel-03030362>.
- (17) MURCH, K. W.; MOORE, K. L.; GUPTA, S.; STAMPER-KURN, D. M. *Nature Phys* **2008**, 4 (7), 561-564.
- (18) CHAN, J.; ALEGRE, T. P. M.; SAFAVI-NAEINI, A. H.; HILL, J. T.; KRAUSE, A.; GRÖBLACHER, S.; ASPELMEYER, M.; PAINTER, O. *Nature* **2011**, 478 (7367), 89-92.
- (19) LU, C.-s. *Journal of Vacuum Science and Technology* **1975**, 12 (1), 578-583.

-
- (20) MICROCHEMICALS Application Notes for photolithography with technical informations for photoresists, solvents, developers and etchants, https://www.microchemicals.com/downloads/application_notes.html.
- (21) RIEGER, D.; GÜNZLER, S.; SPIECKER, M.; NAMBISAN, A.; WERNSDORFER, W.; POP, I. *Phys. Rev. Appl.* **2023**, *20*, 014059.