

SOLITONS DANS UNE LIGNE ÉLECTRONIQUE NON-LINÉAIRE

MAX MARROT

Les solitons, ou ondes solitaires, sont une classe spécifique de solutions à des équations non-linéaires qui ont de nombreuses propriétés intéressantes. De l'équation de Schrödinger non-linéaire dans les fibres optiques, en passant par une chaîne de pendules couplés, ou encore les ondes hydrodynamiques avec l'équation de Korteweg-de Vries, les systèmes physiques admettant des solutions solitons sont nombreux et variés. Dans cet article nous nous intéressons à la production et la propagation d'un soliton dans une ligne électrique non-linéaire, composée d'inductances et de diodes varicap, des capacités non-linéaires.

1. INTRODUCTION

Les solitons sont des solutions particulières d'équations différentielles non-linéaires possédant des propriétés remarquables. Ce sont des *ondes solitaires*, c'est à dire localisées spatialement, et possédant une étonnante stabilité. Une des premières observations d'un tel phénomène remonte au début du 19^e siècle, en 1834 par John Scott Russell,¹ alors qu'il suivait une vague remontant un canal sur des kilomètres près d'Edinburgh en Écosse. Cette observation surprenante n'a cependant pas pu être supportée par une théorie consistante avant les travaux de Korteweg et de Vries en 1895,² qui établissent une des premières équations décrivant le comportement des solitons et qui porte leur nom.

La physique des solitons s'est depuis considérablement enrichie, tant dans l'aspect théorique que dans les différentes mises en évidence expérimentales. L'objet de cet article est de présenter un système électronique assez simple, admettant des solutions solitons, et pouvant être implémenté et étudié expérimentalement avec du matériel standard de salles de TP universitaires.

2. UNE PREMIÈRE APPROCHE THÉORIQUE

2.1. Présentation du système

La ligne électrique étudiée dans cet article est composée d'un enchaînement de cellules inductances-diodes varicap (Fig. 1). Historiquement ce circuit a été proposé par Hirota et Suzuki en 1973.³ L'objectif était de trouver un système électrique permettant de modéliser un système mécanique connu sous le nom de réseau de Toda. Un réseau de Toda est un modèle simple intervenant en physique du solide et qui consiste en une chaîne d'oscillateurs couplés de façon non-linéaire. Son intérêt principal est d'avoir été un

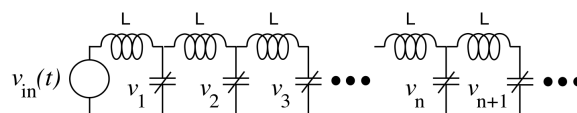


Fig. 1 Ligne électrique non linéaire inductance-varicap. Les inductances sont identiques le long de la ligne (notées L) et on note v_i la tension au nœud n^i , v_{in} est la tension initiale envoyée dans la ligne. Adapté de [5].

des premiers exemples de systèmes non-linéaires complètement intégrables.⁴ Il admet également des solutions solitons.

Formellement, les équations électriques régissant la ligne LC non-linéaire sont différentes de celles obtenues pour le réseau de Toda. Nous verrons que pour ce système, lorsque les capacités variables suivent une loi d'évolution spécifique de leur capacité en fonction de la tension à leurs bornes, il est possible, sous réserve d'approximations, de se ramener à une équation similaire.

2.2. Equations et solutions de la ligne électrique

Les paramètres d'intérêt dans la suite des équations sont les suivants :

- La tension V_n aux bornes de la n -ième capacité,
- Le courant i_n traversant la n -ième inductance,
- La charge Q_n de la n -ième capacité.

En appliquant une loi des mailles et une loi des nœuds pour chaque cellule, et en combinant ces deux équations, il est alors possible d'obtenir l'équation suivante pour la charge Q_n :

$$\frac{d^2 Q_n}{dt^2} = \frac{1}{L} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n), \quad (1)$$

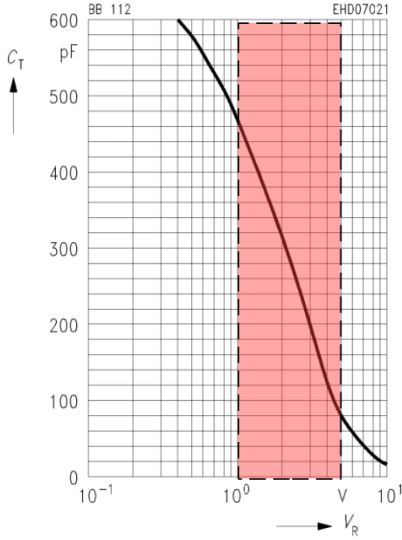


Fig. 2 Allure de variation de la capacité, $C(V)$, d'une diode Varicap BB112 en fonction de sa tension, V . La zone colorée correspond à la gamme de tensions balayées lors des différentes mesures (entre 1 et 6 V selon les mesures). Graphe adapté de la fiche technique de la diode Varicap BB112.

avec L l'inductance des bobines, et où l'on considère un modèle idéal : résistance interne des bobines nulle et absence de courants de fuite pour chaque cellule.

C'est maintenant que la spécificité de la diode varicap entre en considération afin de pouvoir transformer l'équation (1). Il n'existe pas d'équation exacte décrivant la variation de capacité d'une diode varicap en fonction de la tension. Cependant généralement, on considère que la capacité $C(V)$ suit une loi empirique et varie comme l'inverse d'une puissance de V . L'allure schématique de cette dépendance est représentée en figure 2. En pratique, la tension de travail V à laquelle est soumise la diode varie assez peu autour d'une tension V_0 dite de polarisation, qui fixe le point de fonctionnement de la diode. On désigne alors C_0 la capacité nominale de la diode comme $C_0 = C(V_0)$. La zone colorée de la figure 2 montre la gamme des tensions balayées aux cours des différentes mesures. Généralement, on prend une tension de polarisation V_0 entre 3 et 4 volts, et l'écart v à cette tension est dans cette gamme là également.

Si l'on s'intéresse donc à des tensions proches de V_0 , de la forme $V(t) = V_0 + v(t)$ il est alors possible de développer au premier ordre l'expression de $C(V)$ pour obtenir la loi suivante :

$$C(V) \approx C(V_0)(1 - av) , \quad (2)$$

ce qui, en exploitant la relation entre charge et capacité $C = \frac{dQ}{dV}$, donne l'équation :

$$\frac{d^2}{dt^2}(v_n - av_n^2) = \frac{1}{LC_0}(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) . \quad (3)$$

L'étape suivante du développement consiste à réaliser une approximation des milieux continus à la chaîne électrique. En considérant que l'écart v_n à la tension de polarisation varie faiblement d'un site à l'autre de la chaîne, il

est alors possible de réaliser un développement de Taylor à l'ordre 4 des tensions $v_{n\pm 1}$ voisines de v_n , menant alors à l'équation ci-contre :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 v^2}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{c_0^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} , \quad (4)$$

où $c_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ peut s'interpréter comme la vitesse des ondes planes dans la chaîne. La variable x introduite ici représente une distance mesurée en nombre de cellule (passage de l'équation 3 à l'équation 4), c'est ainsi une variable sans dimension. Le développement est ici effectué jusqu'à l'ordre 4 car le tronquer à l'ordre 2 seulement reviendrait à perdre le caractère dispersif du milieu.⁶

Cette équation porte le nom d'équation de Boussinesq modifiée, ou *Bad Boussinesq* (Le préfixe Bad vient du fait qu'elle possède des familles de solutions en ondes planes instables⁶). Il est possible de chercher des solutions à profil constant, ce qui permet d'obtenir des solutions en ondes solitaires. Ce faisant, on obtient des solutions de la forme :

$$v(n, t) = A \operatorname{sech}^2((n - ct)/l) , \quad (5)$$

où l'on a noté $l = c_0/\sqrt{3(c^2 - c_0^2)}$ la largeur de l'impulsion, et $A = \frac{3}{2a} \frac{(c^2 - c_0^2)}{c^2}$ son amplitude.

Cette forme de solution correspond bien à ce que l'on peut attendre d'une solution soliton et sera également celle mesurée expérimentalement par la suite.

3. RÉALISATION EXPÉRIMENTALE

La ligne électrique présentée en figure 1 a été réalisée avec un nombre 12 cellules inductances-varicap, et des diodes varicap BB112. Les impulsions d'entrée ont été réalisées à l'aide d'un GBF (*Keysight 33500B*), tandis que l'acquisition des différents signaux a été faite via un oscilloscope (*Keysight InfiniiVision DSOX3014A*). Un premier exemple de signal obtenu est présenté en figure 3. On peut constater un très bon accord de l'ajustement des données expérimentales avec le modèle théorique en sécante hyperbolique carrée donné en équation (5).

Une autre caractéristique intéressante à noter est la robustesse de la formation du soliton vis à vis de la forme du signal d'entrée, c'est à dire qu'une excitation créneau est suffisante pour observer la formation et propagation du soliton. Cela traduit une des propriétés de ces ondes solitaires, à savoir qu'il s'agit d'un équilibre stable : la présence de faibles non-linéarités et d'une faible dispersion, dont les effets sont antagonistes, permet d'expliquer cette remarquable stabilité.

3.1. Propagation du soliton

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution du soliton au cours de sa propagation. Pour ce faire, les tensions sont prélevées à différents noeuds de la ligne électrique.

Une des complications qui est rapidement apparue est le fait que la ligne non-linéaire soit composée d'un nombre assez faible de cellules unité : 12 dans notre cas. Pour des raisons de manque de composants, il n'était pas possible d'augmenter sa taille. Ainsi, les effets des perturbations

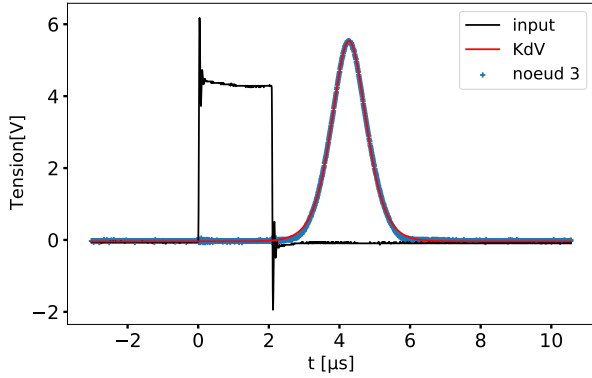


Fig. 3 Un exemple de signal obtenu dans la ligne électrique avec un signal d'excitation de type créneau.

dues à l'aspect fini de la ligne apparaissent rapidement dès lors que l'on effectue des mesures à des noeuds éloignés du signal d'entrée.

Un des effets majeurs qui peuvent être observés est la réflexion en bout de ligne qui vient perturber de façon significative les signaux se propageant dans le sens initial. En effet les ondes réfléchies se propageant en sens opposés peuvent être mesurées également et se superposent aux signaux d'intérêt. Afin d'éviter au maximum ces problèmes, la majorité des mesures ont donc été réalisées sur des noeuds proches du signal d'entrée.

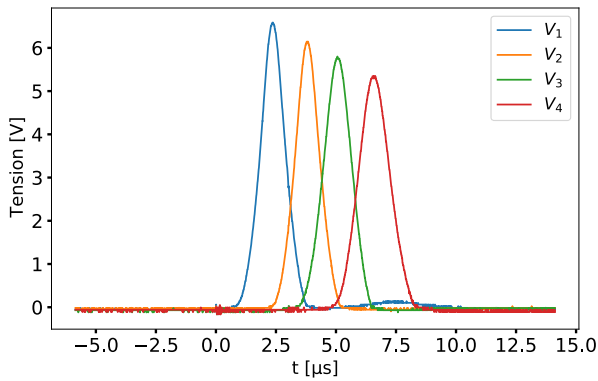


Fig. 4 Propagation du soliton le long de la ligne électrique aux quatre premiers noeuds.

Un exemple des signaux mesurés est présenté en figure 4. Une des premières propriétés que l'on peut observer est que, contrairement à ce qui était attendu, l'amplitude du signal n'est pas constante au cours de la propagation. Cela avait déjà été observé par Islam et al. [7] dans une ligne similaire, et peut avoir plusieurs explications. Une des plus plausibles est la présence d'atténuation au cours de la propagation due à des pertes provenant soit des résistances internes des composants, des contacts et câblages non optimaux, ainsi que potentiellement la présence de courants de fuite dans les capacités variables.

En revanche, la vitesse de propagation des solitons semble, elle, être constante (Fig. 4). Théoriquement, on s'attend à ce que les solitons dans la ligne électrique se

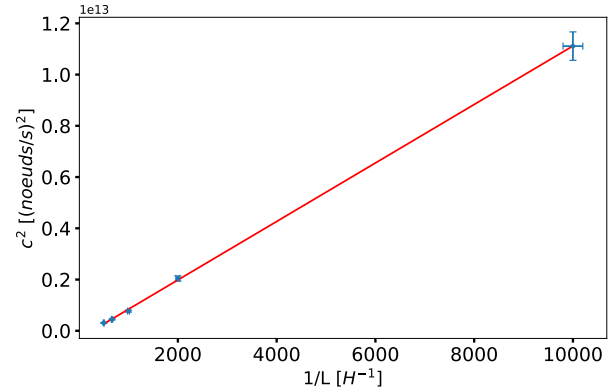


Fig. 5 Mesures de la vitesse de propagation des solitons en fonction de l'inductance L de la ligne.

propagent à une vitesse c supérieure à c_0 la vitesse des ondes planes de grande longueur d'onde pouvant également exister dans la ligne. Cependant, pour que les approximations effectuées restent valables il incombe que c reste très proche de c_0 (de l'ordre de 5% maximum). Une première façon de vérifier cette hypothèse a été d'étudier la dépendance de la vitesse de propagation des solitons en fonction de l'inductance présente dans le circuit. Étant donné la dépendance $c_0 = 1/\sqrt{LC_0}$, on peut s'attendre à observer un comportement similaire pour c .

La ligne électrique a été câblée plusieurs fois pour différentes valeurs d'inductance L . Dans chaque cas, la vitesse de propagation du soliton a été mesurée en relevant le signal de tension à différents noeuds de la ligne. En traçant la dépendance de c^2 en fonction de l'inverse de l'inductance L , on attendrait alors un comportement linéaire (Fig. 5). En extrayant l'inverse de la valeur de la pente, homogène à une capacité, on obtient une valeur de 480 pF, ce qui est cohérent avec les gammes de valeurs de capacités pour les diodes BB 112 pour des tensions de polarisation de l'ordre du volt (Fig. 2).

Une autre caractéristique notable est le léger élargissement du soliton au cours de sa propagation. La figure 6 résume l'évolution de la largeur du soliton en fonction de la largeur de l'impulsion initiale. On peut constater que mis à part au premier noeud, où l'évolution n'est pas très prévisible, la largeur de l'impulsion initiale n'a l'air d'avoir que peu d'influence, si ce n'est une translation, sur la dynamique de l'élargissement du soliton au cours de sa propagation, qui apparaît assez linéaire.

Pour aller plus loin, il est également possible de regarder le lien entre largeur et amplitude des solitons. La figure 7 montre la dépendance entre largeur et amplitude aux noeuds 2, 3 et 4 de la chaîne pour différentes largeurs de l'impulsion créneau initiale. Le lien entre amplitude et largeur est loin d'être trivial si l'on s'en réfère à leurs expressions (5). Ainsi il est surprenant de constater que le rapport des deux semble être une constante, l'évolution étant linéaire, de pentes similaires, pour chacun des noeuds. Il est cependant possible d'en trouver une interprétation. Le rapport de l'amplitude sur la largeur du soliton donne une

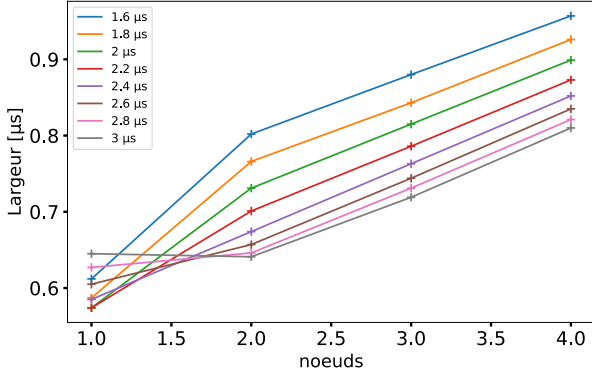


Fig. 6 Evolution de la largeur du soliton pour différentes largeurs de l'impulsion initiale.

expression complexe, de la forme : $\frac{3}{2a} \frac{(c^2 - c_0^2)^{3/2}}{c_0 c}$.

La vitesse c étant une grandeur dépendant de nombreux autres paramètres, notamment dans le cas des solitons de l'amplitude de ceux-ci, l'expression précédente n'a, à priori, aucune raison d'être constante sur les gammes de largeur et d'amplitude explorées, et ce n'est probablement pas le cas en toute généralité. Cependant dans le cadre des mesures réalisées ici le soliton était préparé dans des conditions particulières nécessaires aux hypothèses énoncées précédemment, notamment celle imposant à c de rester proche de c_0 qui elle est une constante ne dépendant que des caractéristiques de la ligne non-linéaire. Ainsi ce comportement à priori linéaire sur la plage de valeurs balayées, ici, pourrait s'expliquer par la faible variation de la vitesse. Celle-ci reste au premier ordre constante et dans l'ordre de grandeur de c_0 , ce que l'on peut par exemple écrire de la forme $c = c_0(1 + \alpha)$ avec $\alpha \ll 1$. L'évolution observée en figure 7 permet donc de vérifier que l'on reste bien dans le cadre des hypothèses effectuées pour obtenir les expressions théoriques établies précédemment.

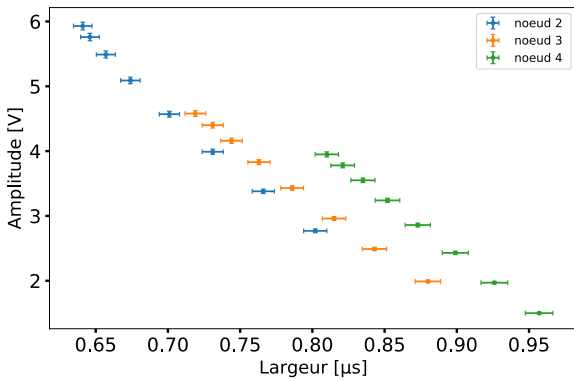


Fig. 7 Amplitude et largeur des solitons à différentes positions pour différentes valeurs de largeur initiale de l'impulsion. Chaque point correspond à une valeur différente de la largeur initiale de l'impulsion.

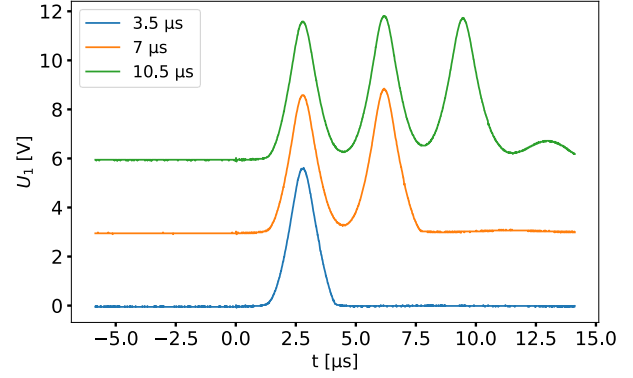


Fig. 8 Trains de solitons résultants pour différentes largeurs d'impulsion initiale (valeur indiquée en légende). La tension est mesurée au noeud 1. Les signaux correspondant à une largeur de 7 μs et 10.5 μs ont été traduits verticalement par souci de lisibilité.

3.2. Solutions multi-solitons

Un autre point intéressant à explorer expérimentalement est la dynamique de solutions multi-solitons. Deux cas de figure ont été étudiés expérimentalement : d'une part, la création d'un train de soliton lorsque la largeur de l'impulsion initiale dépasse un certain seuil, et d'autre part, la collision de deux solitons.

Dans la partie précédente, nous nous sommes intéressés à l'influence de l'élargissement de l'impulsion initiale sur les caractéristiques du soliton résultant. Les variations demeurent relativement faibles et seul un soliton est produit et se propage dans la ligne non-linéaire. Cependant, lorsque la durée de l'impulsion initiale devient significative, il est alors possible d'observer la formation de deux solitons simultanés, ceux-ci s'organisant en trains (Fig. 8).

On constate que pour des largeurs inférieures à environ 3.5 μs , seul un soliton est produit et se propage dans la ligne. Lorsque que la durée de l'impulsion est augmentée et qu'elle dépasse cette largeur d'environ 3.5 μs , l'élargissement de l'impulsion n'a plus d'influence sur le soliton formé, mais a pour effet d'en préparer un second dans la continuité directe du premier. On peut observer l'ajout d'un soliton supplémentaire pour chaque incrément de 3.5 μs . Comme montré en figure 8, il est possible de préparer des solitons en trains, ceux-ci pouvant contenir jusqu'à 3 solitons. La petite variation à l'extrémité droite de la dernière courbe est due à la réflexion en bout de ligne. Au vu de la courte longueur de celle-ci, il n'était pas possible de créer des trains contenant plus de solitons sans que le signal soit perturbé par ces réflexions.

Ainsi bien que la largeur du signal d'entrée dépasse de loin celle des solitons pouvant se propager dans la ligne, il est toujours possible d'en produire, ceux-ci s'organisant alors en un train de solitons consécutifs. Il est d'ailleurs possible d'exploiter ce phénomène pour réaliser des compressions temporelles et obtenir un gain en tension significatif. L'équipe d'Elizondo-Decanini et al. [8] a, par exemple, réussi à obtenir des trains dont l'amplitude atteignait la dizaine de kilovolts en exploitant ce principe.

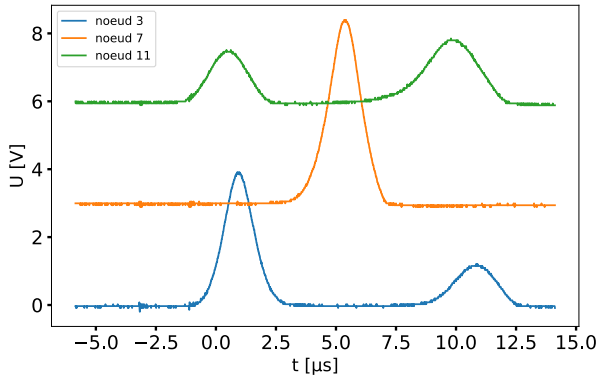


Fig. 9 Collision de deux solitons d'amplitudes différentes se propageant en sens opposés. Les signaux des noeuds 7 et 13 ont été translatés verticalement par souci de lisibilité.

Il est également intéressant d'étudier la collision de deux solitons. Pour ce faire le montage électrique reste similaire à celui présenté en figure 1, mais à l'extrémité de la ligne est câblé un second générateur d'impulsions. En synchronisant les deux GBF (via la sortie TTL de l'un branchée sur le déclenchement externe du second), il est alors possible d'envoyer deux impulsions aux extrémités se propageant en sens opposés, celles-ci entrant en collision approximativement au milieu de la ligne.

Un exemple d'observation expérimentale est présentée en figure 9. On peut constater qu'au niveau du noeud 7, les deux impulsions sont superposées et n'en forment plus qu'une qui conserve tout de même la forme standard attendue, puis chaque impulsion continue à se propager dans sa direction respective.

Deux faits sont à remarquer. D'une part, le fait que le soliton de faible amplitude (celui se propageant de droite à gauche en figure 9) ait gagné en intensité : son amplitude est en effet plus importante après la collision qu'avant. Il a été difficile de trouver une explication convenable à cette observation, mais elle s'inscrivait dans une observation plus générale qui montrait que les impulsions se propageant en sens inverse de celui imposé par l'impulsion principale (celle se propageant de gauche à droite en figure 9) avaient tendance à gagner en amplitude. Cela pourrait s'expliquer par le fait qu'une petite partie de l'énergie perdue par le premier soliton resterait stockée dans les capacités variables et serait retransférée au second lors de sa propagation. À cela s'ajoute le fait que lors de la collision il est également possible qu'une partie de l'énergie de l'un ait été transférée à l'autre.

Le second fait remarquable est le retard qu'ont acquis les deux solitons du fait de leur collision : bien qu'il ne soit pas très visible en figure 9, d'autres mesures en montraient un plus significatif. Dans ce genre de ligne électrique le principal effet d'une collision sur les solitons est l'acquisition d'un déphasage. En outre il a été montré que ce déphasage est d'autant plus marqué qu'ils possèdent des caractéristiques (amplitude et tension de polarisation, par exemple) différentes.⁷

3.3. Perspectives expérimentales

La ligne présentée en figure 1 n'est pas le seul exemple de système électronique pouvant permettre la réalisation de solitons. Une autre ligne, composée de diodes et de dipôles particuliers, présentée en figure 10a permet d'obtenir un soliton en intensité, contrairement aux solitons étudiés dans cet article qui étaient des solitons en tension dans la ligne électrique. De plus, un autre intérêt de ce type de ligne est qu'elle est un analogue direct à la chaîne de Toda mentionnée plus tôt, il pourrait donc être intéressant de comparer les deux résultats obtenus pour chaque ligne. Pour l'instant la ligne de la figure 10a n'a pas été réalisée car son implémentation serait très chronophage et requiert un nombre bien plus important de composants. Les expériences présentées jusqu'ici ayant été effectuées avec le matériel de la collection de l'ENS de Lyon, réaliser un nombre décent de cellules, comme ci-contre, aurait impliqué d'utiliser une trop grande quantité de matériel, ce qui n'était pas envisageable lors des expériences précédentes. Cependant la complexité et la potentielle richesse de ce second système en font un objet de choix pour envisager des futures réalisations et mesures expérimentales.

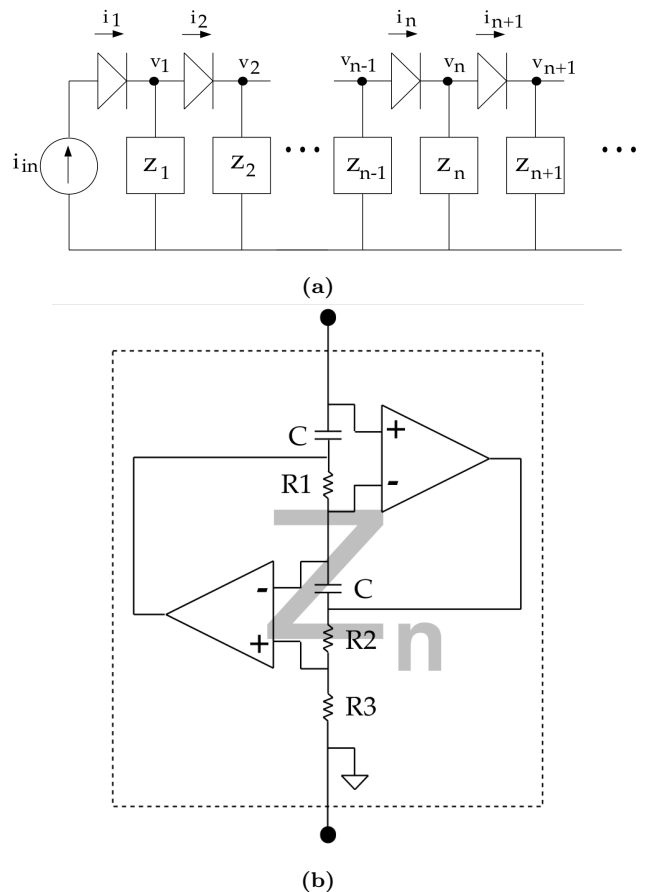


Fig. 10 Schéma électrique d'un circuit permettant l'observation de solitons en intensité. Adapté de [5].

4. CONCLUSION

La ligne électrique composée d'inductances et de diodes varicap permet donc d'observer, sous les bonnes conditions expérimentales, la propagation de solitons en tension. Plusieurs caractéristiques de ceux-ci ont pu être étudiées : leurs formes, leurs similarités et différences avec le modèle théorique, l'influence de la propagation sur les différents paramètres ainsi que le lien entre amplitude et largeur. Les solutions à plusieurs solitons ont également été mises en évidence de façon qualitative, de la formation de trains à la collision entre deux solitons. Enfin le circuit de type *diode ladder* représenté en figure 10a pourrait être prometteur pour pousser plus loin les études expérimentales, tout en pouvant potentiellement résoudre certains problèmes observés sur le circuit inductances-varicap : l'ajout de dipôles actifs dans le circuit permettrait ainsi par exemple de réduire l'atténuation au cours de la propagation.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier Loïc Marlgrey pour son aide, tant expérimentale que sur les nombreuses discussions que l'on a pu avoir sur le sujet. J'aimerais également remercier les techniciens de l'ENS de Lyon qui m'ont permis de manipuler en salle de TP pour ce projet.

RÉFÉRENCES

- (1) RUSSELL, J. S., *Report on Waves : Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*, 1845.
- (2) KORTEWEG, D. J. ; de VRIES, G. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **1895**, 39 (240) , DOI : [10.1080/14786449508620739](https://doi.org/10.1080/14786449508620739).
- (3) HIROTA, R. ; SUZUKI, K. *Proceedings of the IEEE*, **61** (10) , DOI : [10.1109/PROC.1973.9297](https://doi.org/10.1109/PROC.1973.9297).
- (4) FLASCHKA, H. *Phys. Rev. B* **1974**, 9 , 1924-1925.
- (5) SINGER, A. C. ; OPPENHEIM, A. V. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **1999**, 09 (04) , 571-590.
- (6) PEYRARD, M. ; DAUXOIS, T. , *Physique des solitons* ; EDP Sciences : 2004.
- (7) ISLAM, N. ; SINGH, J. P. ; STEIGLITZ, K. *Journal of Applied Physics* **1987**, 62 , DOI : [10.1063/1.339743](https://doi.org/10.1063/1.339743).
- (8) ELIZONDO-DECANINI, J. M. ; COLEMAN, D. ; MOORMAN, M. ; PETNEY, S. ; DUDLEY, E. ; YOUNGMAN, K. ; PENNER, T. ; FANG, L. ; MYERS, K. *IEEE Transactions on Plasma Science* **2015**, 43 (12) , 4136-4142.